The Mathematical Intelligencer 誌より

数学の基礎をめぐる論争

21世紀の数学と
数学基礎論のあるべき姿を考える

田中一之 編・監訳

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

Originally published in English in the Journal:
"The Mathematical Intelligencer"
Issue 5.4: pages 17 to 20, Mac Lane, *The Health of Mathematics*, 1983.
Issue 6.3: page 5, Smoryński, *Letter to the editor*, 1984.
Issue 7.1: pages 51 to 52, Browder, *Mathematical Judgement*, 1985.
Issue 7.1: pages 52 and 76, Mac Lane, *Whose Mathematical Judgement?*, 1985.
Issue 7.4: pages 27 to 35, Drake, *How Recent Work in Mathematical Logic...*, 1985.
Issue 8.2: pages 41 to 63, Victor Harnik, *Infinitesimals from Leibniz to Robinson, Time to Bring Them Back to School*, 1986.
Issue 8.4: pages 74 to 75, Mac Lane, *Are we all just specialists?*, 1986.
Issue 8.4: pages 78 to 82, Ian Stewart, *Frog and Mouse Revisited: A Review of ...*, 1986.
Issue 9.3: pages 22 to 24, Fred Richman, *The Frog Replies*, 1987.
Issue 9.3: pages 24 to 25, Ian Stewart, *Is There a Mouse in the House?*, 1987.
Issue 9.3: pages 25 to 26, Fred Richman, *The Last Croàk*, 1987.
Issue 9.3: page 26, Ian Stewart, *A Final Squeak*, 1987.
Issue 10.3: pages 12 to 16, Smoryński, *Against Mac Lane*, 1988.
Issue 10.3: pages 17 to 20, Mac Lane, *The Greater Health of Mathematics*, 1988.
Issue 10.4: pages 21 to 28, Robert French, *The Banach-Tarski Theorem*, 1988.
Issue 13.4: pages 31 to 41, Jon Barwise and Larry Moss, *Hypersets*, 1991.
Issue 14.3: pages 4 to 13, A. R. D. Mathias, *The Ignorance of Bourbaki*, 1992.
Issue 20.2: pages 7 to 15, Steve Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, 1998.

編者前書き

本書は，シュプリンガー社の英文季刊誌『数学インテリジェンサー(Mathematical Intelligencer)』の上で 1980 年代に展開された「数学の基礎」に関する 2 つの論争シリーズと，やはり 80 年代後半から 90 年代に同誌に掲載された「数学の基礎」ないし「数学一般」をテーマとした秀逸な論説 5 つを訳出して，1 冊の本として読めるようにまとめたものである．

インテリジェンサー誌は,「数学のインテリジェンス (知的情報) を伝える雑誌」という表題通り，数学の最先端の研究解説から歴史上の人物伝，数学教育やパズル，哲学論争，そして新刊書紹介などバラエティーに富んだ記事を毎号 (A4 サイズ 50〜80 頁) 十数本掲載している．創刊は 1978 年であるから，すでに 1000 以上の記事が載ったことになる．

本書を編むにあたり，創刊号から最近号まで「数学の基礎」に関連する記事をすべて拾い出して一覧表を作ってみたが，今も訳す価値があると思うものだけで 50 編以上になった．そこで，今回は『21 世紀の数学と数学基礎論のあるべきすがたを考える』上で参考になるものという基準で，2 つの論争と 5 つの記事を厳選し，歴史的な話や単なる研究紹介のようなものは別の機会に譲ることにした．

本書の第 I 部は，マックレーンの論説『数学の健康』に端を発する「数学基礎論」論争である．マックレーンの意見では，現代数学全般に学識より専門の研究業績を偏重する傾向があり，それを端的に表す例がロジックの分野ということになる．ここで注意しておくと，欧米でロジックとか数理論理学

というのは，我が国で一般に「数学基礎論」と呼ばれる数学の一分野のことである．マックレーンは，現在のロジックの主要研究テーマである ZF 集合論上の巨大基数の研究と再帰理論 (recursion theory) の次数の研究を槍玉にあげ，ロジックは「数学の基礎」への関心を失ったと言い放つ．彼の主張に対しては，それがなぜ悪いという意見と，それは事実ではないという抗議がありうる．それらの反論の中身や，マックレーンによる再反論については，本文を読んでいただきたい．第 I 部の翻訳は，ドレイクの論説を黒田覚氏が担当し，それ以外を田中が受け持った．

第 II 部は，イアン=スチュアートの書評に始まる現代版「直観主義 vs. 形式主義」論争を収録した．スチュアートは，1985 年に出版された 2 冊の基礎論の本 (『構成的解析』と『超準実解析入門』) を比較しながら野心的な書評を書いた．これらの本の背景にはそれぞれ直観主義と形式主義の思想が流れていて，1920 年代にそれらの数学思想の間に起きた論争をアインシュタインがカエルとネズミの喧嘩に喩えたことから，第 II 部の表題は『カエルとネズミの再会』になっている．ステュアートは初め中立の立場を取っているが，構成主義数学の旗手リッチマンがカエルとして登場したために，最後はネズミになってしまう．超準解析については，第 III 部にも入門的な解説記事があるので合わせて読んでいただくとよい．第 II 部全体の翻訳を永山操氏に担当していただいた．

インテリジェンサー誌には数学基礎論あるいはロジックに関連する膨大な数の記事が存在するが，第 III 部では「数学の基礎」を考えるのにとくに役立つであろうもの 3 編を選んだ．ハーニックの『高校で無限小を教えるために』は，素朴な無限小の概念をどうやったら正しく矛盾なく扱うようにできるかを説明し，超準解析の世界に誘う．フレンチの『バナッハ・タルスキの定理』は，選択公理から導かれる不思議な現象を解説する．最後に，バーワイズ・モスの『超集合』は，ZF 集合論から基礎の公理を取り除き，逆にその否定を加えた体系の性質とその応用について解説する．翻訳者は，ハーニックとバーワイズ・モスの記事が角田法也氏，フレンチの記事が黒田覚氏である．

第 IV 部の 2 つの記事の 1 つ『ブルバキの無知』は，第 I 部のエピローグとも見なせるものである．正確にいうと，第 I 部の議論の延長上でマックレーンは『数学：その形式と機能』という大部の本を著しており，この記事はそ

れへの批判を含んでいる．原文はフランス語の引用が多数あり，また英文自体もあまり読みやすいとはいえないのだが，外国語に堪能な白旗優氏が翻訳を引き受けてくれた．最後の『21 世紀の数学の問題について』は，本書においては多少異質かもしれないが，マックレーンらとはまた違う角度から数学の全体像を立体的に描いており，今後の数学基礎論が取り組むべき新しい課題も多く含まれていると考えて本書に収めた．翻訳は，山崎武氏と私の共同作業で行った．

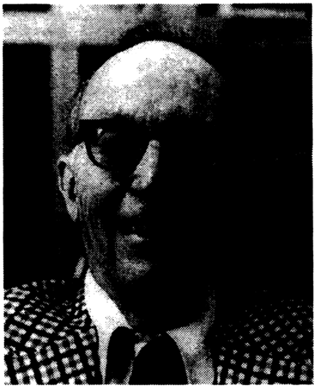
ここに収録した作品を含め，インテリジェンサー誌の優れた記事については，以前からどなたかが翻訳してくれればいいなと思っていたが，その役が私自身にまわってきたのは 2 年余り前のことである．しかし，ここ数年集中砲火で学内外の雑用，いや大切な役目を仰せつかっていた私は，この翻訳作業をとてもやりがいのある仕事と認識しながらも，なかなか手をつけられないでいた．それでも，シュプリンガーの編集部は根気よく古い記事のコピーなど送ってくれるし，そのうち翻訳を手伝ってくれるという仲間も現れた (というよりは，無理矢理お願いしたのかな？) ので，昨夏から一念発起で翻訳の作業に取りかかった．こうして出版まで漕ぎ着けたのは，まさに編集部と 5 人の翻訳協力者のお陰である．ただし，記事の選択，訳語の統一，最終稿の点検などは，編・監訳者として私が行ったので，全体を通して不備な点があればその咎めは私が負わなければならない．

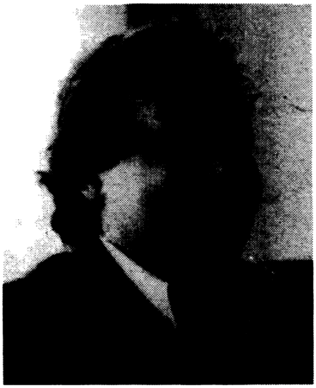
この本が，数学に関心のある人たちに広く読まれ，21 世紀の数学と数学基礎論のあり方を考えるきっかけになってくれれば，編者としてそれにまさる喜びはない．

1999 年 1 月　仙台にて　　　　田中一之

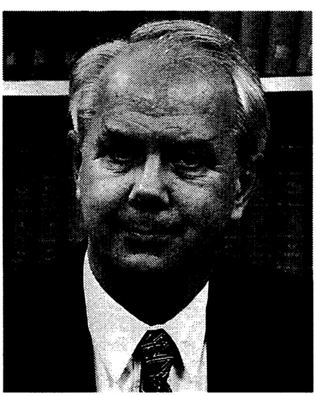
数学の基礎をめぐる論争　目次

第I部
数学の健康
マックレーン氏の意見とその反論 1


S. Mac Lane


C. Smoryński

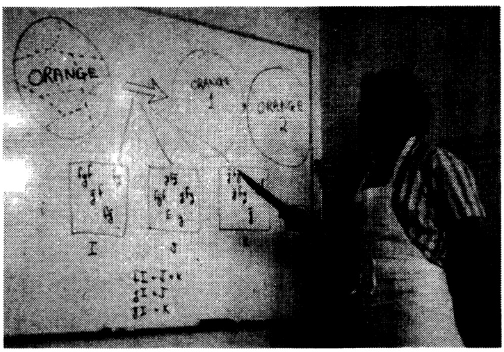
第II部
カエルとネズミの再会
構成的解析と超準解析..........63



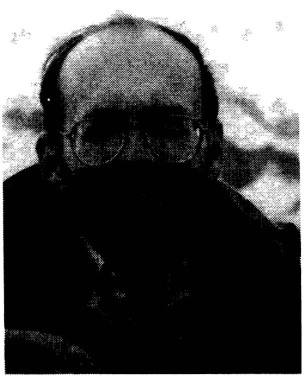
I. Stewart ©The Royal Society



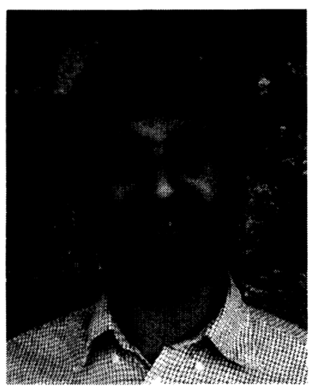
F. Richman



R. French

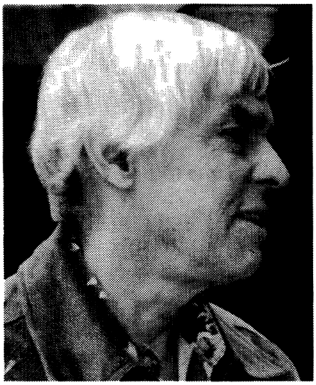


J. Barwise

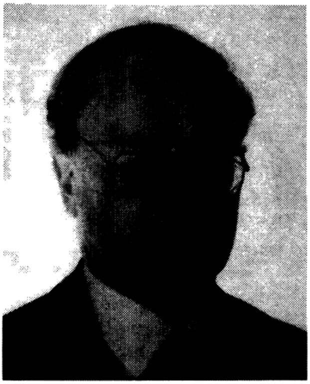


L. Moss

第IV部
展　望 149



S. Smale



A. R. D. Mathias

初出・訳者一覧

すべて “The Mathematical Intelligencer” 誌 (Springer-Verlag) より

[第 I 部]

Saunders Mac Lane, *The Health of Mathematics*, Vol. 5, No. 4, 1983 (田中一之　訳)
Craig Smoryński, *Letter to the editor*, Vol. 6, No. 3, 1984 (田中一之　訳)
William Browder, *Mathematical Judgement*, Vol. 7, No. 1, 1985 (田中一之　訳)
Saunders Mac Lane, *Whose Mathematical Judgement?*, Vol. 7, No. 1, 1985 (田中一之　訳)
F. R. Drake, *How Recent Work in Mathematical Logic Relates to the Foundations of Mathematics*, Vol. 7, No. 4, 1985 (黒田覚　訳)
Saunders Mac Lane, *Are we all just specialists?*, Vol. 8, No. 4, 1986 (田中一之　訳)
Craig Smoryński, *Against Mac Lane*, Vol. 10, No. 3, 1988 (田中一之　訳)
Saunders Mac Lane, *The Greater Health of Mathematics*, Vol. 10, No. 3, 1988 (田中一之　訳)

[第 II 部]

Ian Stewart, *Frog and Mouse Revisited: A Review of . . .* , Vol. 8, No. 4, 1986 (永山操　訳)
Fred Richman, *The Frog Replies*, Vol. 9, No. 3, 1987 (永山操　訳)
Ian Stewart, *Is There a Mouse in the House?*, Vol. 9, No. 3, 1987 (永山操　訳)
Fred Richman, *The Last Croak*, Vol. 9, No. 3, 1987 (永山操　訳)
Ian Stewart, *A Final Squeak*, Vol. 9, No. 3, 1987 (永山操　訳)

[第 III 部]

Victor Harnik, *Infinitesimals from Leibniz to Robinson, Time to Bring Them Back to School*, Vol. 8, No. 2, 1986 (角田法也　訳)
Robert French, *The Banach-Tarski Theorem*, Vol. 10, No. 4, 1988 (黒田覚　訳)
Jon Barwise and Larry Moss, *Hypersets*, Vol. 13, No. 4, 1991 (角田法也　訳)

[第 IV 部]

A. R. D. Mathias, *The Ignorance of Bourbaki*, Vol. 14, No. 3, 1992 (白旗優　訳)
Steve Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, Vol. 20, No. 2, 1998 (田中一之・山崎武　訳)

第I部

数学の健康

マックレーン氏の意見とその反論

数学の健康

ソーンダース=マックレーン (Saunders Mac Lane)

数学の調子はどうだろうか？ 折に触れて問いたい質問である．当節の答えなら，まあ大体良好だけど，多少よくないところもあるね，といったところだろう．

例えば，多くの重要な問題が最近になって解けたことは，快調の証である．有限単純群に対して怪物群を筆頭とするリストが完成した．ディオファントス方程式に関する有名なヴェイユ予想が，代数幾何の大道具を駆使して解決した．また，3 次元球面の位相同型写像で，素数周期の周期性をもち，かつある結び目を固定させるものは，回転しかないというポール=スミス (Paul Smith) の予想も，5，6 人の協力によって正しいことが分かった．ポアンカレ予想が 4 次元の場合について解かれ，その証明はすでにかなり明瞭になってきているが，3 次元の問題は超難問として残されている．他にも多くの重要成果が得られており，かつてないほど多くの数学者があらゆる方面で頑張っている．

この頃あまり進歩がみられない分野 (束論，球面のホモトピー群など) もあるが，近年著しい発展を遂げた分野も数多い．代数幾何，数理物理 (ヤン・ミルズと超リー代数)，双曲幾何 (3 次元多様体)，計算機科学 (P と NP は等しいか？) などなど．ある特定の分野が活発になるのは，その方面の発展に将来性があるという一般的な見込みを反映しているのが普通である．また，優位

* ［訳注］マックレーンは，1909 年生まれのアメリカの高名な数学者で，アメリカ数学会の会長や科学院の副会長などの要職を歴任している．1930 年代初め，ドイツのゲッチンゲン大学に留学し，ベルナイスの下で数学基礎論を学んでいたが，ナチスの台頭で帰国を余儀なくされ，以後基礎論から離れて，ホモロジー代数や圏論の先駆者として名を馳せた．

に立つ分野がときどきに移動するのは，これまでも数学の発展の特徴であった．例えば，今世紀の始め，複素1変数関数への大きな期待が，この分野を他を圧する領域につくり上げた．当時フランスでは，数学者の真の目標は大ピカールの定理の拡張を発見することだと標榜されたそうだ．複素多変数について同様な強調がなされていたのは，もっと最近のことである．第1次大戦後には，解析的数論，抽象代数学 (ネーター (Emmy Noether)，アルティン (Emil Artin))，バナッハ空間上の線形作用素 (ウィーナー (Norbert Wiener)，バナッハ (Stefan Banach)) が成長開花したが，これらの分野の繁栄は永くは続かなかった．第2次大戦後には，代数的トポロジーがしばらく中心的な存在だっだが，その地位も次第に微分トポロジーや解析に奪われていった．このような栄枯盛衰は必定であるが，かつて繁栄したある分野で訓練を受けた多くの数学者たちが，その分野が袋小路に陥ってもそこにしがみついている様子は心配である．袋小路の例としては，非可算アーベル p-群，球の未知なるホモトピー群をすべて計算する (と思われた) 手に負えないスペクトル列などがある．多分いま必要なことは，専門がいつか無益になりうるという悟り (誰しも諦めるのは嫌なものだけど) と，専門を変える人たちのための再生過程である．現在は，我々数学者のほとんどが，自分の専門に限られたセミナーや研究会で仲間うちの専門家に対して話をするだけなのである．

数学の出版物も問題である．(数学に関するほとんどすべての論文の要旨と批評を掲載する) Mathematical Reviews 誌の最近号の厚みが示すように，出版物が多すぎる．プレプリント (未公開論文) のままにしておいた方がいいような余分な論文，さらには書き下さない方がよかったようなつまらないプレプリントが世の中に溢れている．でも，同時に，全然出版されないという問題もあるのだ．圏論から双曲幾何までいくつかの分野で，出版論文がまったくないのに名声を博している数学者がいる．もちろん，定理を証明する方がその証明を書き下すよりおもしろいに決まっているが，口頭だけで研究成果を伝えるという傾向は (多分ワイエルシュトラス (Weierstrass) の場合を除けば) これほど広まったことはなかった．また，伝達手段が，いい加減な論文や (幾何的トポロジーに見られる) 謎めいた研究報告であったり，あるいは証明を付けず手の内を隠してその優位性だけを訴えるものもある．天才はささいなことにこだわらなくていいというのは本当かもしれないが，擬似出版物に

よる名声に我々が左右されすぎると，天才を真似て謎めいた主張をする人をふやすだけである．

出版過剰の問題は,「論文を書くか首を掻くか (publish-or-perish)」という大きな圧力の他に，アイデアを (いくら魅力的なものでも) 発展させすぎたという原因があるだろう．これには多くの例があるが，たまたま私がよく知っている例を 2, 3 挙げてみよう．有限状態機械が集合の上だけでなく，一般的な圏において扱えるという発見があった．すると,「最小実現化」が機械の「振る舞い」に対応するという証明がいくつもいくつも現れた．結局，この誇張がアプローチ全般の評判を落とすことにつながった．難解で興味深い 4 色問題などが生み出したグラフ理論は，数学を社会科学などに新しいスタイルで応用できる理想の道具のように見られていた．そして，このスタイルは，無数の意味のない論文を生み出した．例えば，グラフ理論とエネルギー危機に関するものや，引用分析へのグラフ理論の応用に関するものである．後者のような論文には，科学をいかにして「先端分野」に細分化するかというもくろみがある．こんな胡散臭い擬似応用にも人気があるらしく，引用が最も多い 100 人の数学者の中に，グラフ理論の著者が 2 人入っている．

ファジー集合の場合は，もっと際だっている．もともとのアイデア (ある元 x が集合 A に入っているかいないかという代わりに，x が A に入っている確からしさを測ろうというもの) は，魅力的なものだった．しかし，そのうちにある人たちがすべての数学が集合論の上に築かれていること (圏論派のローベア (Lawvere) 氏には失敬) を思いだし，どんな数学もファジー集合に基づいたものに書き直せることに気づいた．しかも，ファジー集合に基づかせる方法にはいく通りもありうるので，ここに新種の数学に関する無数の論文を生み出す大計画ができ上がった．この計画は，応用可能性に関する誇張を伴って (例えば，ファジー決定理論)，着々と遂行されていった．しかし，応用の方は，ほとんど現実化しなかったようである．新しいアイデアはすばらしいが，それを売り込む手法はいただけない．

数学の多くの分野では，その本来の目標に到達した後も，行き詰まりになりそうな横路をさらに探索することで研究を続けている．私がよく知っている 2, 3 の事例は，数学の入り口のところにある．まず，圏論は，数学の本流における様々な重要概念を明確化し整理するためにスタートしたが，いまや

発展しすぎたために気がめいるくらい一般化されたバラバラの概念を重々しくかつ不明瞭に扱うはめになっている．これは，1960 年代から 1970 年代のフランスで特に顕著であり，そこでは対立する思想グループが互いの意志疎通をはかることに失敗し，ついにはどんなコミュニケーションも困難にしてしまうようなあいまいなスタイルでものが書かれていた．

普遍代数 (一般代数とも呼ばれる) は，ほとんどすべての代数系について共通して成り立つような結果 (すなわちジョルダン・ヘルダーの定理，クルル・シュミットの定理，部分直積など) を調べるために，1930 年代にスタートした．しかし，このタイプの定理はすぐに調べ尽くしてしまい，それ以後は概念的というよりは組合せ的な興味で新しい難問を見出し，それを解こうとする力によって活動を続けている．この分野の主唱者たちは，一般代数が特殊代数と対等なウェイトを持つごとく吹聴している．

この場合問題なのは，科学が良い解の中にあるのではなく難問の中にあるというハンガリー流の数学観が強調されすぎていることである．難問へのこだわりは，問題の大切さが他の事柄との関連性にあることを往々にして見失わせる．あるいは，これは専門化が引き起こす困難の 1 つかもしれない．ある分野がその目的と将来の見通しを失っても，専門の変更が難しく，目的と見通しのないまま人工的な問題によって安易に研究を続けた結果である．

このような専門化の傾向は，数理論理学において特に目立つ．この分野は数学の基礎の研究に始まったが，その研究者たちはすぐに他の数学者から邪魔者扱いを受けて孤立化していった．その後，この分野は目覚ましい発展を遂げ，他の数学にも関連した多くの具体的成果を得たにもかかわらず，まだ孤立は続く傾向にある．と同時に，数理論理学は数学の基礎に対する当初の関心をほぼ完全に失っている．研究者の一部は，概念的な興味よりも，自分たちにも難問が解けることを実証することに躍起である．そのため，例えば，巨大基数のネバー・ネバーランド (決して到達できない地) で打ち立てた新しい公理を彼は使おうとする．あるいは，集合論において連続体仮説の独立性が証明されたので，今度はあらゆる組合せ的な概念の独立性を証明しようとする．ゲーデルの不完全性定理から再帰的関数が生まれ，その関数族が次数の階層をもつことが分かったので，今度はその階層構造の細部に関する技術的に困難な問題を解決しようとする．集合論の公理と連続体仮説がゲーデ

ルの構成的集合族で成立していることが分かったので，それが形成する泥沼 (morass) がどんなに深くても，この集合族の微細構造 (fine structure) を探索しようとする．

これら手に負えない数学の分野でも，それぞれの専門家は私には多分理解できないような目的を持っているだろう．それでも，暗闇の中で苦闘するケースが多すぎると思うし，それが専門への頑迷な執着の代価なのだと私は指摘したい．

数学の発展の質と速度を犠牲にしないかぎり専門化は避けられないが，専門へのこのような過度な固執はいらない．そうすることの損失の 1 つは，数学者が新しい分野の誕生に気づかないことにある．特に，多くの数学者は計算機科学の発展にうとい．これは，数学にとってだけでなく，計算機科学にも損失である．計算機科学の進歩は，概念の発達よりは道具の開発と歩調を合わせ，気まぐれな流行を追い，読めない OHP シートを過剰に使用するあらかじめ缶詰めに入ったような講義により特徴づけられている．

過去の時代には，数学全般を展望できるような数学者がおり，彼らは自らの研究の進展にとらわれずに数学の未来を予測した．しかし，今日ではそういう展望をもつ数学者はほとんどいないように思う．その原因は，広い視野をもつ数学者より，特殊な専門家が評価を受けるようになっているからである．

さらに批判的に言えば，数学がどちらに向かってどう進めばいいかという全体の合意がないように思える．サウジアラビアの首都リアドで開かれた第 1 回湾岸諸国数学会議 (1982) に出席した際，このことを強く実感させらた．この会議における有益なセッションが終わったある晩のこと，我々何人かは地元の教授のアパートでご馳走を振る舞われた．食後，我々は屋上に上がって，のんびり談笑した．この会議のスターだったマイケル=アティヤ (Michael Atiyah) は，翌日アラビアの若手数学者たちのために研究方向をアドバイスするような講演をすることになっていたので，それに思いを巡らしていた．私は彼の隣に座っていたので，まもなく私たちはどういうやり方で数学をすべきかという議論に入り込んだ．私は，標準的な数学者のスタンスを取った．すなわち，興味の対象を明確にし，必要な公理系を設定し，使う言葉を定義しなければならない．ところが，アティヤは理論物理学者のスタイルを好んだ．理論物理学者は新しいアイデアが浮かんだとき，立ち止まってそれを定義し

たりはしない．そんなことをするのは無益な束縛にすぎない．そのかわり理論物理学者はアイデアについて話し合い，様々な関連性を進展させて，最終的にもっと柔軟で豊かな概念にたどり着く．彼がいうには，ディラックの δ 関数と超関数によるその形式化はそのいい例であり，再正規化と量子場理論におけるファインマン経路積分もそうらしい．しかし，私がこだわっている立場は，ホモトピー群であれ随伴関手であれ，数学者は自分が何を語っているか知っていなければならないというものである．

この例は，どうやって数学をすべきか，またどういう方向に進むべきかということに一般の合意がないことを示しているが，実は他の科学はもっと悲惨な状況であることが分かった．社会学者は，世論調査への信頼を悪用している．天文物理学者は，幾何学者よりずっととりとめない憶測に頼っている．計量経済の専門家は，あれやこれや (例えば，エネルギーの使用) について事実照合などやりようもない 50 年計画を推定し続ける．さらに，効用分析の利用が，政策研究のだましになっている．しかし，こうして他の科学がいくらいかがわしい面を持っていようとも，科学の女王がバラバラの専門の沼に沈んでしまっていい理由にはならない．

悲劇の結末を避けるために，我々はまだ多くのことができる．まず，いろいろな分野の専門家の間でもっとアイデアの交流があるといい．数学の姿や方向性を，技術的なことより目的を重視し，もっと広い視点で議論することができる．新しい数学概念が数学の中や理論物理学やその他から生まれそうなとき，その源や進展にもっと目を向けることができる．数学の最近の大きな進歩を整理して解釈する努力がもっとあるといい．

このように変わるためには，個人のやる気とともに研究機関の助力が必要である．まず，大学院生の評価基準の幅を広げること，そして教官の昇進と雇用のための審査を機械的に行わないことから始めてほしい．数学の進歩は，新しいアイデアの理解によって測られるもので，出版物の量で測られるものではないのだ．

インテリジェンサー誌の編集者への手紙

クレイグ=スモリンスキー

ソーンダース=マックレーンの首を求める蛮人の叫び声が聞こえてくるようだ．なかでも，数学者として認知されることを渇望してやまない数理論理学者は，大声で叫ぶだろう．私の声は使いすぎでかれてしまったので，本誌の「数学の健康」におけるマックレーン氏の主張については，大方黙認してもいいと思う．

しかし，彼の論旨においてはマイナーな点かもしれないが，次の2，3の基本的な事柄については，どうしても譲れない．第1に，数理論理学の孤立は，たとえ心理的なダメージが大きかったとしても，すべての面で悪かったわけではない．孤立によってこの分野は自らを発展させることができたのだ．ロジックは，代数・幾何に並ぶ数学の第3の基本様式であると私は考えている．ロジックの数学への応用は，すべての人の目の前にある．単純だから見逃しやすいのかもしれないけれど，孤立の中でこの他に何を期待しよう．数学者として認知されることを望んでいるロジシャンはこういうことは認めないだろう．彼らは代数学者には理解できないほど高度なモデル論のテクニックを代数に応用したり，次数の理論における超難解な定理を証明することで数学の悪いところをすべて意識的に模倣している．

私が言いたいのは，ロジックは代数や幾何と対等の立場で思考の様式を供給していることである．数学の基礎づけは，その副産物であって，目標ではないと思う．歴史的には，ロジックの方が副産物かもしれないけれど．実際，マックレーンが間違っている点の1つは，基礎づけとは関係ないロジックの世界にある巨大基数の研究まで一緒に含めていることである．巨大基数の研究は基礎づけではなく，その正反対のものである．その目的は，狭義の数学基礎論を破壊し，ユークリッド流の学問をポッパー流 (用語についてはラカトシュの科学基礎論の文献を参照) の，我々がすでに持っているとモーリス=クラインが誤解しているようなものに変えることである．飾らずに説明すると，高度な無限の公理の下ではそれだけ多くの定理が証明できるというゲーデルの考察がある．そのような公理を研究する本来の目的は，普通の数学において巨大基数の本質的な使用を見出すこと，つまり安定した数学をより不安定な土台の上に築くことである．数学の救済のために，この反基礎論計画がいかに重要であるかは，ゲーテのファウスト (一部，二部) を読んだものには明白である．ここでこれ以上詳しく述べる必要はないだろう．

数学の診断

ウィリアム=ブラウダー (William Browder)

ソーンダース=マックレーン氏の記事 (「数学の健康」) とアルマン=ボレル (Armand Borel) 氏の記事 (「数学：芸術と科学」[1]，本書未収録) を読んで，普段私のうちに隠れていた強い哲学的な衝動に駆られ，自分の考え方を一層発展させたいと思うようになった．

マックレーンのような広い見識と力量そして名声を持った数学者に反論するのは誰しも先が怖いし，あらゆる点で完全に反対するなら返事は簡単なのだがそれも不可能である．ボレルの考えには共鳴するところも多いが，彼よりはさらに一歩踏み込みたい．

数学は科学の一分野であり，同じ科学的方法論で研究されているわけだが，その研究の題材により技術が規定され，他の科学と区別される．科学が「自然の法則」を導き出す努力をしているとすれば，数学者はアイデアと概念でできている「自然」に対して同様の努力をしている．

概念は人工的なもので，自然現象とは違うと異議をとなえる人もいるだろう．しかし，熱や温度の概念だって，直線や平面と同じように人工物である．数学者として，我々は第一に概念の間の論理的関係に注目するが，実験科学においてそれは二義的であり，観測によって概念を検証することが優先する．

数学を特徴づけているとされる形式化や抽象化を我々が道具に使っている理由は，対象となる自然界の方にある．道具が先にあって，研究対象が決まっているわけではない．

---

[1] Armand Borell, Mathematics: Art and Sience, *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 5 No. 4.

マックレーンは，物理と数学を対照させて，次のように言っている：

数学者は自分が何を語っているか知っていなければならない．

また，数学をする過程について，次のように述べた：

興味の対象を明確にし，必要な公理を示し，用語を定義する．

故意にではないのだろうが，数学を創造するダイナミックな過程を無視し，修道院的で衒学的な味気ない学問の姿を描いている．

何を話しているかよく分からないことが，数学をやる動機となることがある．興味の対象が定まらないことが，我々を研究に駆り立てる．用語法も研究と共に進化することで，我々の研究に楽しみ・活力・新鮮味を与えてくれるのだ．

ボレルは，科学の一分野もしくは科学の道具としての数学と，それ自身の方向性・目的・尺度をもった研究テーマとしての数学との美しいバランスを攻撃した．多くの数学者は，数学に対して不必要な防御態勢をとる．人間の生活と文化における数学知識の究極の意義や利用について，我々が他の分野の研究者よりも心配すべき必要があるのだろうか．

素粒子の構造，星と星雲，遺伝子の構造などは，興奮の最中にある領域で，活発な研究がなされ，それがもつ意味は予想できない．しかし，同様なことは，数体，3 次元多様体，偏微分方程式などにもいえるのである．科学技術や生活水準に対する貢献の面で，数学の成績は他の科学より見劣りするものではない．抽象的な研究領域では，研究の成果を現実の応用に結びつけるまでに時間がかかることが多いが，予期せぬ関連が生まれることも多いのでこれも定かではない．

しかし，貢献度をその研究のための経済的コストで割って測るなら，数学の利潤の高さは明白である．

数学は，一人立ちした科学の一分野として，数学自身の持つ規準によって成功の度合いを測る資格がある．他の基礎科学と同じく，研究の応用性は長期的には確かであっても，どの部分が役に立つかなどは予測できない．我々の責務は，数学の活力の方向に従うことである．長期的には，この方向が科学的にも，文化的にも，経済的にも最も高い利潤を産み出すという信念を持

つべきである．

数学の各方面の研究について時価を鑑定することは，研究者の個人的見解で行うにしろ，資金を配分する行政的な立場で行うにしろ，最も重要な課題である．その際，流行に引き寄せられる力はとても強い．たしかに，活力のある発展こそが流行を作るという面もあるが，もしホットなテーマだけにすべての労力と資源が集中したら，次の方向転換のための下準備はどうやってできるのだろう．

最近のトポロジーの目覚ましい発展のいくつか (例えば，4 次元多様体におけるフリードマン (M. H. Freedman) の発見や，多様体でない構造の 3 角分割に関するエドワーズ (R. D. Edwards) やキャノン (J. W. Cannon) の仕事) は，20 年前に R. H. ビング (R. H. Bing) が始めた分割空間の理論に基づくものであるが，この理論は当時代数的な手法が流行っていたトポロジストの間ではあまり話題にならなかった．

また，マックレーンは，最初の目標に到達した多くの分野が，行き止まりの道を専門分化することによって生きながらえているとして,「専門への過度の固執」を嘆いている．私の見方では，それはあべこべではないかと思う．

マックレーンが挙げた一例である圏論をとってみても，代数的トポロジーやホモロジー代数のために議論の枠組みを作るという当初の目的は，きわめて一般的なものであったが，すぐに達成された．しかし，その目的の達成よりも，代数幾何においてグロタンディク (Alexander Grothendieck) が，代数的 K 理論でクィレン (D. G. Quillen) が，トポロジーにおいてはいろいろな状況でいろいろな人が，圏論的手法を説得力のある形で使っていることの方が重要だと思う．手法の深みや真の応用をもたらし，数学全般に強い影響を与えるのは，専門化の奥義である．

探し求めている一般的な理論や相互関係を見出すには，専門的な研究によって得られる理解の深さが必要なのである．我々は深く狭く掘らねばならない．ただし，一般性の形跡があったら，それを認める心構えが必要である．

今日の大学院生は，過去の世代と比べて，より広い知識と興味を持っているように私は思う．これは，一般教育の幅を広げようという大学側の自覚的な決定の成果ではない．プリンストンの場合，私が学生だった 30 年前と形式的な資格要件は何も変わっていない．それは，むしろここ 2, 30 年の数学自

体の発展に起因しており，それまで散逸していた領域の間に生まれた相互交流と共栄の歩みが，学生たちの数学文化を広げる必要性と手段を与えているのだ．例えば，トポロジーにおいては，数論，偏微分方程式，数理物理と微分幾何，表現論などが有効に用いられているし，トポロジーの手法がこれらの領域に対しても大きな影響を与えている．

かなり昔の話であるが，ポアンカレ予想に没頭している C. D. パパキュリアコッポラス (C. D. Papakyriakopoulos) に，ある人が尋ねた．まったく新しい洞察を要さないで，汚い単純計算によって計算機が解いてしまう心配はないのかと．そのときの彼の返事は忘れらない．この言葉はもっと広いケースにもあてはまるだろう．「心配ない．数学が自己防衛するよ．」

誰の数学診断か？

ソーンダース=マックレーン (Saunders Mac Lane)

インテリジェンサー誌の私の記事「数学の健康」に対し，ウィリアム=ブラウダー氏がさっそく感動的な数学賛歌を書いてくれたことを嬉しく思う．彼が一所懸命であることは伝わるが，私の指摘の大半をとらえていない．

ブラウダーは，数学が科学の一分野であると主張する．これには条件が必要だ．ほとんどの数学の概念は，人間の関心事から生まれているが，その一部は科学的な関心，別の一部は科学以前の関心である (数えること)．しかし，科学は実験によって確かめられ，数学は証明によって確かめられる．だから，数学者として，私たちは何について語っているのか知らなければならないと，私は書いたのだ．ブラウダーはこれを味気ないと言っているが，私は反対の災害を危惧する．例えば，(数学界で最も権威のある) Annals of Mathematics 誌でも，証明が不完全で，今日までまだ修復できないような代数幾何の論文を載せている．証明がなければ，数学ではない．

ブラウダーにとっては，数学はアイデアと概念からなる「自然」を扱うものである．このようなプラトン主義思想では，我々がその自然にどうやって触れたり，見たりできるかと説明しようなどと悩まない．これは，我々の概念を正確に定義するのには最適な考え方である．ブラウダーが，抽象的な分野では研究から実際の応用までにある程度時間がかかるというのを見て，私はぞっとした．良い数学であるためのテストは，応用性のみによってなされるものではない．抽象的な分野では，無限の時間を待つことになるかもしれない．すべての概念がいつかは応用可能になるといった要求で，数学を縛る

べきではないのだ．

重箱の隅をつつくような専門化が，ここ 20 年くらいに広く浸透した．次の 20 年間に何が起きるかについて，我々は関心を持つべきである．私は，過度の専門化についていくつもの例を挙げ，その中には圏論もあった．それらの例には議論の余地があると思うし，代数幾何やトポロジーで圏論が有効に使われているというブラウダーの指摘はまったく正しいと思う．しかし，専門化されすぎている圏論の別の部分 (例えば，n 次合成) を彼は無視している．

最近のトポロジーの活発な発展に対するブラウダーの熱狂振りには，十分な根拠があると思う．しかし，この健康な分野でさえ，将来には専門化の危険性があるのだ．今年，トポロジー (幾何的なものと代数的なものを合わせて) についての国際会議がばらばらに 9 つ開催された．この割合だと，この分野のエキスパートは自分たちの会議にだけ行って，仲間の研究者に講演するだけの時間しかない．他の分野でも，同様の集中化が起きている．ジョン=ムーア (John Moore) を記念するプリンストンの会議が，圏論における彼 (とアイレンバーグ (Samuel Eilenberg)) の偉業 (トリプル) に敬意をはらうためには拡大されなかったことに言及しないわけにはいかない．

ブラウダーは,「数学は自己防衛する」という信念で締めくくった．最近の商業的圧力 (コンピュータ・サイエンス) と誇大広告 (科学計算) を考えるならば，ちょっとした防衛力を付け加えねばならないだろう．ブラウダー氏の熱意も，正しければ役立つに違いない．

最近の数理論理学と数学の基礎との関係

F. R. ドレイク (F. R. Drake)

この論文は，ソーンダース=マックレーン氏が彼の論説［1］の中であからさまに数理論理学を攻撃し，“数学の基礎に対する当初の関心を失っている”と述べたパラグラフに対抗するものである．近年における数理論理学の研究の多くは，基礎との明確なつながりを持っていると私は考えるので，それがなぜかを説明する義務があるだろう．

● 数学の基礎とは何を意味するか？

歴史的な見地から重要な面は，何が証明されていて，何がされていないかをはっきりと説明する手段を提供したことである．多くの現役の数学者はこのはじめの部分を，集合論的構成，あるいはツェルメロ・フレンケルの集合論の公理 (ZFC) を伴った 1 階論理の仕組みに要約できるものとみなしている．これは 1 階の形式的体系であり，(ゲーデルの完全性定理により)1 階の論理の部分は完全である．しかし (ゲーデルの不完全性定理により) 集合論の部分は完全ではなく，また完全にすることは不可能である．そして，これで数学の基礎の物語は終わりだと結論づけるのは無茶である．ただ，1 階論理上の形式的体系にとって変わるものはない．というのは，それ以外の形式化における “証明” と称されるものには確信がもてないからである．我々は 1 階の体系において証明の形式化の方法を (少なくとも原理的に) 確認できるときに限って，ある事柄が本当に証明されたと認められるのである．よって我々が望む

べき最善のことは，どんな1階の理論が特定の数学の分野の形式化に使うことができるかを調べることである．

この問題を押し進めると，ZFCより強い理論と弱い理論の双方に行きつく．古典的な数学の大部分は，ZFCよりはるかに弱いところで遂行できる．ときには算術(例えばペアノ算術PA)で十分であり，またあるときは解析(2階算術)の一部分やそれより少し高いレベルの集合論が必要であったりもする．他方では，数学自身のために提供された問題がZFCとは独立であるという解決をみた例も数多く存在する．連続体仮説(ヒルベルトの第1問題)はそのような問題のほんの一例で，他にも興味深いものもつまらないものもたくさんあり，またいくつかの問題は巨大基数公理の状態に依存することが示されている．

● 無矛盾性の強さに関する部分順序

算術のある部分を含むような1階の形式的体系 T をとったとき，T が無矛盾であるという主張は $\mathrm{Con}(T)$ として T の中で形式化できるが，T が実際に矛盾しないかぎり，$\mathrm{Con}(T)$ は T の中で証明可能ではなく，$T \cup \mathrm{Con}(T)$ はより強い理論になる(これがゲーデルの第2不完全性定理である)．そこで，

$$\mathrm{Con}(T) \Rightarrow \mathrm{Con}(T')$$

という関係は，これらの形式的体系全体の上での無矛盾性の強さに関する部分順序となる(もちろん，実際には体系の同値類上の部分順序である)．この関係はヒルベルト(David Hilbert)が数学の基礎についてのプログラムで定めた有限の方法で証明されるとしてもよい．この部分順序は有向で，実は上半束である．すなわち，理論 T, T' が与えられたとき，3番目の理論 T'' で

$$\mathrm{Con}(T'') \Leftrightarrow \mathrm{Con}(T) \,\&\, \mathrm{Con}(T')$$

となるものが，ほとんど自明に構成できる．

過去20年間に渡って数理論理学の多くの研究現場で提示されてきた基礎的な問題とは次のものである：任意に数学の一部分が与えられたとき，上の部分順序の中でのその無矛盾性の強さを定めよ．

言い換えると，数学のある分野が与えられたとき，その数学をするのに仮定される無矛盾性の強さはどの程度であるか？ それは PA より強くないか，あるいは ZFC 全体ぐらいの強さが必要か，それともそれ以上か？ この問いに答えるためには，まずその問題を形式化しなければならない．では，それは形式化の方法によって違いが生じるであろうか？

ここではこれを様々な事例で説明してみようと思う．しかし，これはもちろん完全なリストではなく，私の省いた例の中にも他の論理学者たちの好みの例があるであろう．しかしながら，最近の数理論理学のいかに多くの仕事がこの状況に適しているかを示すには十分な例を含めたと思う．

● この部分順序における主要体系 ●

ペアノ算術はすでに十分単純なように思われるが，実際にはその多くの部分体系が興味深いものであることが知られている．これらの体系のほとんどはペアノ算術の帰納法の公理

$$[\varphi(0) \& \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n \varphi(n)]$$

に用いられる論理式 $\varphi(n)$ に制限をつけることによって得られる．様々な弱い算術が知られている．カービー (L. A. S. Kirby) とパリス (J. B. Paris) やその他の結果 ([2], [3], [4] をみよ) によって，このような体系で分類される組合せ論の主張が得られている．

これより上に進むと，実数や実数上の関数，距離空間 $\mathbb{R}^n$ などの様々なものを扱うものとして，解析学の形式化が考えられる．実際にこれらを調べるには 2 階算術として知られる形式的体系を用いるのが都合が良い．これはペアノ算術に自然数の集合を表す新しい種類の変数を加えたもので，この集合変数を $X, Y, Z, \ldots$ などと表す．すると帰納法の公理は X を集合変数として，唯ひとつの公理

$$[0 \in X \& \forall n(n \in X \to n+1 \in X) \to \forall n(n \in X)]$$

で置き換えることができ，これらの体系に関する興味は，どの程度の内包公理が許されるかというところにある．内包公理は論理式 $\varphi(n)$ に対して

ZFC

ツェルメロ・フレンケル公理系 (選択公理を含む) は集合の累積階層

$$V_0 = \emptyset \quad (\text{空集合})$$
$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha) \quad \alpha \text{ は順序数}$$
$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \quad \lambda \text{ は極限順序数}$$

を記述するものである．このとき $V = \bigcup V_\alpha$ は次の公理をみたす：

外延性：a, b が同じ要素を持つならそれらは等しい．

$$\forall z(z \in a \leftrightarrow z \in b) \rightarrow a = b.$$

和集合：a が集合なら，その要素たちの和も集合である．

$$\exists b \forall z(z \in b \leftrightarrow \exists u(u \in a \& z \in u))$$

無限：無限集合が存在する．

$$\exists w(\emptyset \in w \& \forall x(x \in w \rightarrow x \cup \{x\} \in w))$$

ベキ集合：任意の集合 a に対して，その部分集合すべての集まりもまた集合である．

$$\exists b \forall z(z \in b \leftrightarrow z \subseteq a)$$

基礎：空でない集合 a は自分自身と交わりを持たない要素を持つ

$$\exists z(z \in a) \rightarrow \exists y(y \in a \& y \cap a = \emptyset)$$

置換 (図式)：任意の集合 a と関数 F に対して，a の F による像はまた集合である (すなわち $\{F(y) \mid y \in a\}$)．ここで F は論理式で表され，それ自身は集合でないかもしれない (すなわち，そのグラフを順序対の集まりとして，真のクラスになるということである．しかし，論理式はある関数を表さなければならない)．

$$\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y) \& \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow$$
$$\forall a \exists b \forall z(z \in b \leftrightarrow \exists u(u \in a \& \varphi(u, z))$$

ツェルメロ集合論はより弱いものでそれは置換公理を持たず，代わりにそれから導かれる次の主張を公理とする．

分出 (図式)：集合 a の任意の部分集合は集合である．

$$\exists b \forall z(z \in b \leftrightarrow z \in a \& \varphi(z)).$$

対集合：2つの集合 a と b の (非順序) 対は集合である．

$$\exists c \forall z(z \in c \leftrightarrow z = a \vee z = b).$$

通常はこれに選択公理が加えられる：これを最も単純な形で形式的に書くと，A が空でない互いに交わりを持たない集合たちの集合とするとき，A のそれぞれの要素と1つだけ共通の要素を持つような集合が存在する，となる．

$$\forall y \forall z\big(y \in A \& z \in A \rightarrow$$
$$(y \cap z = \emptyset \vee y = z) \& y \neq \emptyset\big) \rightarrow$$
$$\exists C \forall y\big(y \in A \rightarrow \exists v(C \cap y = \{v\})\big).$$

歴史的にはこれらが最も一般的な公理であるが，空集合が存在するという公理が加えられることもある (これは他から導くことができるが)．より弱い体系を考えるときには，これらの公理の形は他のものに比べて不便なこともあるが，理論全

体から見ればそれらは同値になる.
数学においてほとんどの場合,正則性公理は必要ない.しかしそれは無矛盾性の強さを増さないことが知られており (J. フォン=ノイマン,1929),集合論にとっては多くの場合有用である.

$$\exists Y \forall n [n \in Y \leftrightarrow \varphi(n)]$$

で表される (これにより集合 $\{n \mid \varphi(n)\}$ について議論することが可能になる). 様々な論理式 $\varphi(n)$ のクラスに対して,いくつもの“弱い解析”の体系が得られる.これらの体系に対しては多くの結果が得られており,ハーヴィー=フリードマン (Harvey Friedman),シンプソン (S. G. Simpson) などの仕事により通常の数学における定理のいくつかはその強さが決定されている.(フリードマンによる)1 つの例として,算術的内包公理 (φ が算術的,すなわち,算術量化記号は含むが,集合量化記号は含まない場合) をもつ体系は,実数の単調有界列は極限を持つという定理とちょうど同じ強さである ([17] に概説がある).

ここからツェルメロ集合論まではまだ大きなギャップがあり,ZFC まではもっと大きなギャップがある.ここでは 1 つだけ結果を述べる.それはマーチン (Martin) のボレル決定性の証明で,これが置換公理を真に必要とする (超数学的でない) 数学の結果であり,したがってツェルメロ集合論より強いものである.しかしそれはまた ZFC 全体よりは弱いものでもある.

ZFC より強い理論に対しては,巨大基数が主要体系を与える.その存在性の問題とはまったく無関係に,これらは ZFC より強い無矛盾性の強さを調べるすべを与えている.実は,これは多くの場合に予想外のことであった.例えばソロベイ (Robert M. Solovay) [7] は到達不能基数の存在を仮定して,“実数の集合はすべてルベーグ可測である”ことが無矛盾であることを証明した.多くの研究者がこの仮定を取り除こうとする中,最近シェラー (Saharon Shelah) はそれが必要であることを示した.強制法による仕事の多くはこの部分順序に関する結果をどうにかして証明したものとして解釈することができ,また並び上げられた巨大基数の多くはそのために役立つことが分かって

ボレル決定性

これは論理学者の間で非常に有名な結果である．というのは，これが数学的に述べられる結果で，正則性公理を用いず，置換公理(のある部分)を必要とする初めてのものだからである．これ以前にはすべての数学(普通の数学?)はツェルメロ集合論だけで可能だったのである．

2人のプレイヤーIとIIが単純に整数を交互に言い合うだけのゲームを考える．まずIがx_0，IIがx_1，Iがx_2，IIが$x_3 \ldots$，というように無限に続ける(多分退屈であろうから我々はこれを頭の中で考えるだけで，実際にやったことはない!)．各プレイヤーは相手のプレイヤーの動きを知っており，結果はある無限列$(x_n)_{n\in\omega}$となる(ここでωは$\{0,1,2,3,\ldots\}$，すなわち自然数全体の集合である)．

するとこの列は自然数から自然数への関数全体からなるベール空間${}^{\omega}\omega$のある点となる(ベール空間は実数直線上の無理数全体の集合と同相である)．いま，部分集合$A \subset {}^{\omega}\omega$が与えられたとき，$(x_n) \in A$ならIの勝ち，そうでなければIIの勝ちとする(勝者のいないゲームなんてどこがいいのだろう?)．さて，どちらが勝つであろう?

この疑問を数学的に言うと，勝ちを確信できるような方法はあるかということである(数学者は負けることが嫌いなのである――子供とトランプをして下手だといって責められる数学者がいるだろうか?)．ここでのゲームプランは戦略と呼ばれ，これは単に途中までの手順(すなわち自然数の有限列)に対して，次の1手を与える関数である．相手のどんな手に対しても勝つことができるとき，それを必勝戦略と呼び，どちらかのプレイヤーが必勝戦略を持つとき，Aは決定されるという．これに対してまず最初に得られた結果は，開集合(そして閉集合も)が決定されるというものである．ボレル階層は開(閉)集合から初めて超限可算回のステップにより得られるが，かつては各ステップについての決定性が別個の定理になるように思われた．しかしながらマーチン［5］はすべてのボレル集合が決定されることの証明を与えた．

すべての集合$A \in {}^{\omega}\omega$が(ボレルであるかないかにかかわらず)決定されるという仮説は決定性の公理と呼ばれる――これは選択公理と矛盾するが，ZFのみと矛盾するかどうかは分かっていない．この公理からはいくつかの魅力的な数学が得られ，この無矛盾性の強さを定めることは現在の主要な問題の1つである．

いる．実際ごく明らかなことであるが，巨大基数がいかに興味深いかは，そのような基数の存在が無矛盾であれば理論 T も無矛盾である，という形の結果によって測ることができる．これらの結果の逆はほとんどの場合ゲーデルの構成可能集合 L を考えることで導かれる．宇宙 V についてのある性質が証明されたとき，V のある基数 (しばしば最初の非可算基数 ω_1) は L で (到達不能，マーロ，弱コンパクト，あるいはそれ以上の) 巨大基数となる．この路線は近年，後で述べる被覆補題の形で大きく強化され，これにより可測基数やそれ以上の超巨大基数に対する興味が喚起された．

最後にこの部分順序における最も強い要素は，矛盾する理論に対応していることを述べておく．これを代表するものとしては $0=1$ が伝統的に使われる．しかし，上に挙げたどの理論の無矛盾性も証明することは決して期待できない．というのは，ゲーデルの定理によりこのような理論の無矛盾性を証明する唯一の方法はその理論より強い理論の無矛盾性を仮定することだからである．ある理論について考えるとき実際にそれが矛盾していることに気づくこともある．そのような例を後に述べる．しかしこれらの理論が実際に無矛盾であるならば，今日知られている数学にのっとってその数学的な証明を与えることは決してできないのである．

ここで取り上げた主要体系には線形順序がついているが，この部分順序全体としては線形でないことが知られていることを注意しよう．しかしそれは有向であることを考えれば，強さが増加していくような体系たちに最も興味があるということはおそらく予想がつくであろう．しかしそれでも，ここで取り上げた 1 本の線の上にすべての理論が収まることを期待してはならない．

この図式に関する歴史的な偉業としては，ZF と ZFC + GCH がこの部分順序において同値であることを示したゲーデルの仕事が挙げられる．しかし，この結果はほかの無矛盾性の強さのレベルに対して常に適用できるものでないことを注意する必要がある．例えば解析のレベルでは選択公理を付け加えることは真に強さを増加させ，数学者はその使用について述べるときにそれ相応に振る舞っている．またより高いレベルでは様々な強い公理が調べられ，選択公理を仮定するとそれが矛盾することが示された．そうした公理が ZF のみとは矛盾しないことは知られていない (例えば Kleinberg［8］をみよ)．さらにもう 1 つの注意点はこの部分順序における主要体系間には無限個の体系

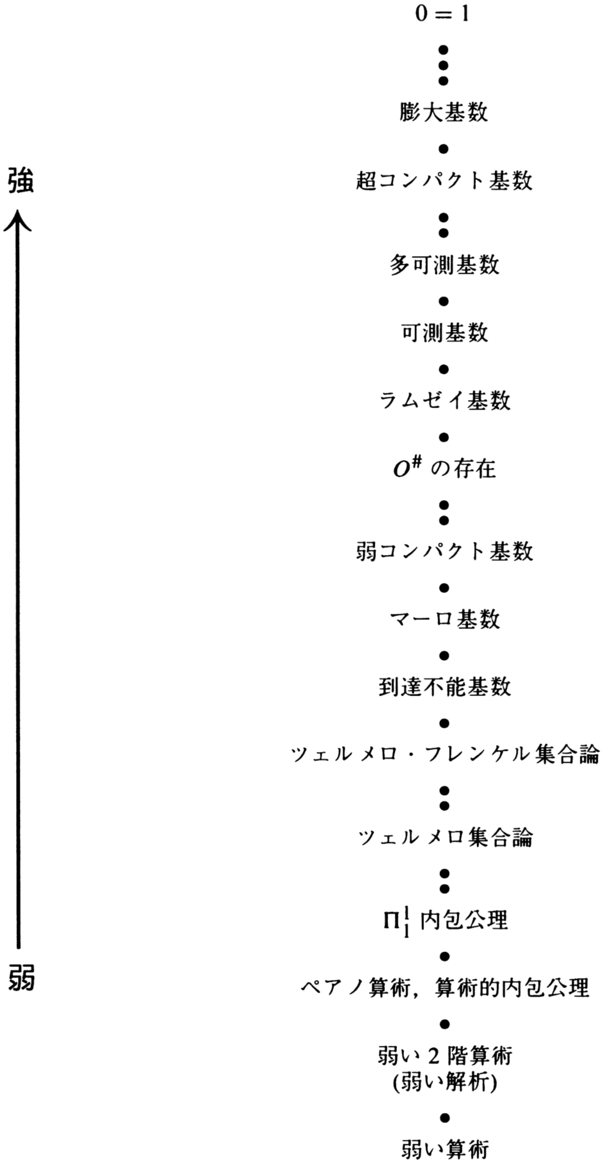


図 1：無矛盾性の強さにおけるいくつかの主要体系

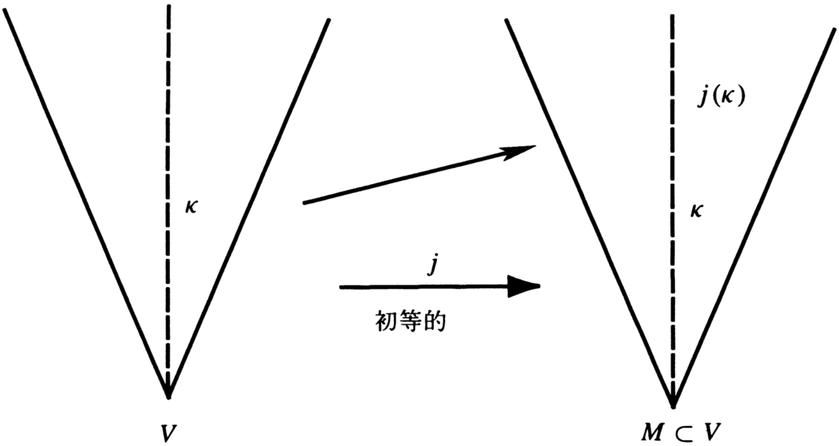


図 2

があることである．各 T にはたしかに "次の要素"，すなわち $T \cup \mathrm{Con}(T)$ が存在する．しかし $T \cup \mathrm{Con}(T)$ からは証明できて，T では証明できない明らかで，かつ，数学的に興味のある事実を ($\mathrm{Con}(T)$ を除いては) 私は知らない[1]．

● 超巨大基数たち

私がその興味深さを主張している基数を説明するため，宇宙の初等的埋め込みの概念を用いた図式 (図 2) を使う ([8] に良い概説がある). M を推移的なクラス (すなわち M の要素の要素はすでに M の要素になっている) として，初等的埋め込み $j : V \to M$ が与えられたとする．j が初等的であるとは，($\varepsilon, =$ と V の集合に対する定数からなる言語上の) 任意の 1 階の文は j によって M に渡されたとき真偽が保存されることである．

また，j は恒等写像でないことも仮定しておくので，V が ZFC をみたすことから j によって動かされる最初の順序数が存在することが容易に示される．動かされる最初の順序数を κ とすると，

[1] ［編者註］：ロッサー文の構成法を応用すれば，T と $T \cup \mathrm{Con}(T)$ の間に無限個の体系の階層を作ることが可能である．

$$j(\alpha) = \alpha \quad \text{ここで, } \alpha < \kappa;$$
$$j(\kappa) > \kappa.$$

となる.

このとき κ は j の臨界点 (critical point) と呼ばれ, κ は可測基数でなければならないことが分かる. 実際,

$$U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$$

と定義すると, V において κ 上の正規 (normal), κ 完全 (complete), 非単項 (nonprincipal) 超フィルタが得られる. M は推移的クラスでこれは ZFC をみたすからすべての順序数は M に入っている, したがって $\kappa \in M - \mathrm{range}(j)$ である. それゆえ U は単項フィルタではないのである.

そしてこれは可測基数の通常の定義と同値になる. 任意の κ 完全な非単項超フィルタから始めて, 超積 V^κ/U を構成することができ, これは整礎 (well-founded) であるから推移クラス M と同型となる.

すると, V の V^κ/M への標準的な埋め込みをこの同型写像と組合せることにより, $j : V \to M$ を得る. そして κ はこの臨界点となっている.

一般に, この構成において $U \notin M$ となるが, しかし常に $P(\kappa) \subset M$ が成り立つ. 実際には M はいろいろな長さの列について閉じているとした方が議論しやすい. すなわち, 長さが κ の M の元の列ではすべて M の元になるが, 一般には長さが 2^κ の M の元の列で M の元にならないものが存在する. これを次のように書く.

$${}^\kappa M \subset M \text{ であるが} {}^{2^\kappa} M \not\subset M.$$

これからより強い概念が与えられる.

定義　κ が λ-超コンパクトであるとはそれがある初等的埋め込み $j : V \to M$ (ここで M は推移的) の臨界点で, ${}^\lambda M \subset M$ (そして $j(\kappa) < \lambda$) であるときをいう.

κ はすべての λ に対して λ-超コンパクトであるとき超コンパクトであるという.

κ は ${}^{j(\kappa)}M \subset M$ となるような埋め込みの臨界点となるとき膨大 (huge) であるという.

κ はさらに $j^n(\kappa) = \lambda$ であって ${}^{\lambda}M \subset M$ であるとき n-膨大であるという(したがって膨大とは 1-膨大のことである).

これがより強い定義であることはすぐに示すことができる．すなわち κ が 2^{κ}-超コンパクトならば，その下に可測基数がたくさん存在するということが証明できる．$X = \{\alpha < \kappa \mid \alpha$は可測基数$\}$ (これは V の中で定義される) を考える．このとき $j(X) = \{\alpha < j(k) \mid \alpha$ は M で可測基数$\}$ であるが，κ は V で測度を持ち，その κ 上の測度の特性関数は長さが 2^{κ} になる．よってこれは ${}^{2^{\kappa}}M$ に入っており，κ 上の任意の測度は M に入る．よって κ は M で可測であり，$\kappa \in j(X)$ となる．したがって，$X \in U$ で，X の大きさは κ になる(U のすべての元は大きさが κ である)．すなわち，κ は V の κ 番目の可測基数である．

以上を繰り返せば κ は可測かつその下に (ある正規測度で) 測度 1 の可測基数の集合が存在するような κ 番目の基数である，などといったことが証明される．実際，このような状況は巨大基数公理では典型的なことである．すなわち以前のものよりはるかに多くのことを与えるなら，新しい公理であるとみなすのである．無矛盾性の意味で，同じ関係が膨大基数と超コンパクト基数の間に成り立つことが示される．膨大基数に関する次の特徴は注目に値する．これはキューネン (Kunen [9]) によるものである．

定理　M が推移的で κ が臨界点のとき，初等的埋め込み $j : V \to M$ は存在しない．ただし，$\lambda = \cup\{f^{(n)}(\kappa) \mid n < \omega\}$ として M は λ 列について閉じているとする．

特に恒等関数以外には初等的な $j : V \to V$ は存在しない (証明には選択公理を用いるが，AC がない場合にはこのような結果は知られていない)．よって n-膨大基数は無矛盾性の強さの極限に近づきつつあり，この極限について我々は何ができるかを知ることは数学的に興味深いことに違いない．

● 巨大基数の無矛盾性の強さを必要とする数学的主張 ●

これから述べることはささいで個人的な関心から選択したにすぎないが，

到達不能基数

置換公理は非常に強い公理で，これとベキ集合公理からアレフの列を作ることができる (GCH の欄をみよ)．これはまた次のような構成を与える：$a_0 = \aleph_0$, $a_1 = \aleph_{a_0}, a_2 = \aleph_{a_1}$ などとし，$a_{n+1} = \aleph_{a_n}$ とする．そして a を $n \in \omega$ に対する a_n の上限とする．このとき a はアレフいくつになるか？ 実は $a = \aleph_a$ である——これは a が極限基数であることに気づけば分かるだろう．この性質を持つ基数はもっと多くそしてより強いものを見つけることができる．ではそれはどこまで行けるだろうか？ この方法でつくられる基数は次の基数 (例えば $\aleph_{\alpha+1}$ でこれは $\aleph_\alpha$ の次である) かあるいは特異極限基数 (つまり上の a は $\sum_{n<\omega} a_n$ だから共終度 ω である) のいずれかである．正則極限基数を作ることはできるだろうか？ もしできるならそれは $\theta = \aleph_\theta$ の形でなければならず，しかも上のように構成されるどんなものよりもはるかに大きいはずである．このような基数は (弱) 到達不能と呼ばれる (上の操作ではここまで達することはできないので，これは適切な呼び方である)．

GCH を仮定しなければ，ベキ集合をとるという操作によっておそらくそのような基数を得ることができるだろう．そこで θ に $\aleph_\lambda < \theta$ なら $2^{\aleph_\lambda} < \theta$ という条件をさらに付け加える．このとき θ は強到達不能と呼ばれ，V_θ は ZFC のモデルとなる．これを自然なモデルと呼ぶ．ゲーデルの第 2 不完全性定理により，ZFC が自身がモデルを持つことを証明できるなら，それは矛盾していることが分かる．よって ZFC が無矛盾ならそれは強到達不能基数の存在を示すことができず，強到達不能基数の存在は無矛盾性の強さの列の中に取り込まれる．代わりにゲーデルの構成可能集合 L をとると，強到達不能基数は弱到達不能基数にとって代わり，これも無矛盾性の強さの列に取り込まれる．

最初の例は疑いなく歴史的に重要なものであると考える．

特異基数仮説　これは 1964 年から未解決となっている GCH のある部分に関する GCH からの帰結である．基数 m に対する関数 2^m についての 2 つの性質が 1904 年に分かっている：

(i) $m < n \Rightarrow 2^m < 2^n$, かつ

(ii) $\mathrm{cof}(2^m) > \mathrm{cof}(m)$　　　　　(J. König 1904)

ここで共終度 (cofinality) cof(m) とは

$$m = \sum_{\beta<\alpha} m_\beta, \text{ ここで, } m_\beta < m$$

となる最小の基数 α である．

明らかに $\mathrm{cof}(m) \leq m$ であり，$\mathrm{cof}(m) = m$ のとき m は正則 (regular), $\mathrm{cof}(m) < m$ のとき m は特異 (singular) という (例えば $\aleph_\omega = \sum_{n<\omega} \aleph_n$ は特異であり，$\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \aleph_0\ (= \omega)$ である).

さてイーストン (Easton) は 1964 年に (i) と (ii) が正則基数について ZFC で証明できるすべてのことであることを示した．しかしその証明法は特異基数についての情報を与えるものではなかった．彼のモデルではすべての特異基数 λ について，2^λ を (i) と (ii) に矛盾しないかぎりいくらでも小さくすることができる．よって，$2^\lambda = \sum_{m<\lambda} 2^m$ であるか，もし $\mathrm{cof}(\sum_{m<\lambda} 2^m) = \lambda$ なら (これは例えば $m < \lambda$ のとき 2^m が狭義の増加関数であるときに起こる), $2^\lambda = (\sum_{m<\lambda} 2^m)^+$ (ここで α^+ は α の次の基数である) となるかのいずれかである．これを我々は特異基数仮説 (singular cardinal hypothesis) と呼ぶ．

SCH の独立性を証明しようという試みには多大なる努力がなされたが，SCH の特別な場合は証明可能であることが早くから分かっていた．特に $\sum_{m<\lambda} 2^m$ の共終度が $> \lambda$ ならば十分大きな $m < \lambda$ に対して 2^m は定数 (例えば σ) であり，そしてまた $2^\lambda = \delta$ である．

しかし本当に状況を打開したのは，1974 年のシルバー (Silver [10]) であり，とりわけ彼はそこで GCH が λ より下で成り立ち，$\mathrm{cof}(\lambda) > \omega$ ならば $2^\lambda = \lambda^+$ であることを示した．これは多くの人々の期待に反するものである．すなわち彼らのやっていたような方法で SCH の独立性を証明することは不可能だったのである．ジェンセン (Ronald B. Jensen) はこれを受けて，SCH がある λ について成り立たないなら，$0^\#$ が存在することを示した——そしてこれは巨大基数が人々が予測しない形で登場した最初のことであった．

ジェンセンの結果がとった形は説明する価値のあるものである．彼は L と V の間の被覆補題と呼ばれるものを発見した．ここで L はゲーデルの構成可

能集合の宇宙 (また V はすべての集合の宇宙) である．L と V の間で被覆が成り立つとは，V で順序数の集合 X が非加算なら，L の集合 Y で $X \subseteq Y$ かつ V で X と Y の大きさが等しくなるようなものがとれることをいう．

これは L と V の基数の間に非常に近い結びつきをもたらす．ジェンセンは次の 2 つのことを証明した．1 つ目は SCH が V で成り立たなければ，L と V の間で被覆が成り立たないというものであり，2 つ目は L と V の間で被覆が成り立たなければ，恒等写像でない初等的埋め込み $j : L \to L$ が存在するというものである．

キューネン (Kunen) はこれより前にこの最後の性質は $0^{\#}$ が存在することと同値であるという結果を出している (これを図 2 と比較することは興味深い)．

続いて，ジェンセンは L に似た多くの性質を持つもう 1 つの内部モデル，コア・モデル (core model) K をつくり出し，彼とドッド (Dodd [11]) はもし SCH が成り立たなければ，K と V の間の被覆が成り立たないこと，そして K と V の間で被覆が成り立たなければ，初等的埋め込み $j : K \to K$ が存在することを示した．そしてこの後者は可測基数が存在するような内部モデルの存在を導く (したがって可測基数の存在性の無矛盾性は "SCH の否定" から導かれる)．

このコア K の 1 つのアイデアは，存在するすべてのシャープを含めるところにある．最近の結果によりこれは存在するすべての可測基数の内部モデルを含むコアまで強められ，ミッチェル (Mitchell) はこれを用いて "SCH の否定" から多くの可測基数の無矛盾性を証明した．ここから先の努力については，現在の研究のトピックである．

1 つ注意すべき点は，初等的埋め込み $j : L \to L$ や $j : K \to K$ は L や K の微細構造を注意深く調べることによって得られるということである．この研究をマックレーンは "泥沼" と呼んで非難したのである (これは不正確である，というのは "泥沼" というのはジェンセンが L の 2 基数予想の証明に用いたモデルにつけた名前である．最近の研究によりこの泥沼は非常に扱いやすい大きさにまで小さくなった (例えば Velleman [12])．そして同じことが L と K の微細構造の複雑さに対してもなされることが望まれるところである)．

SCH の独立性　上に述べた結果により，SCH はすぐにでも証明できるので

はないかと思われるかも知れない．しかし，早くから巨大基数は SCH を成り立たせないことがあることは知られていた．そして 1966 年にプリクリ (K. L. Prikry) は強制拡大によって可測基数は特異基数に変えることができることを示した (これは当初，奇妙なことであるとされ，そのような強い仮定を用いない方法に取り替えられると考えられたが，今日では，ジェンセンの仕事により，極限基数に対しては本質的にプリクリの方法以外にないことが分かっている)．また，$2^\kappa = \kappa^{++}$ となる可測基数 κ から始めると，プリクリ強制法によりこれを真にしたまま，SCH が成り立たない例を作ることができる．しかし可測基数に対して，$2^\kappa = \kappa^{++}$ にすることは非常に困難 (大雑把に言って，超コンパクト基数ぐらいの強さが必要であると思われる, [8] をみよ)．マギドー (Magidor [14]) はその後，プリクリの強制法をきわめて直接的かつ，強力に拡張して，必要とされていた強制拡大を与えた．彼が証明したのは以下のことである：

超コンパクト基数 κ の存在するようなモデルから始めるとき，κ が $\aleph_\omega$ であり，それは依然強極限基数 (strong limit cardinal) (すなわち各 $n < \omega$ に対して $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ であり，よって $\aleph_{\omega+1}$ は $2^{\aleph_\omega}$ に対して SCH が与える最小の値である) であるが，$2^{\aleph_\omega} \geq \aleph_{\omega+2}$ となるような強制拡大が存在する (シェラーの最近の仕事によりこのモデルにおいて $2^{\aleph_\omega}$ がとり得る値が明らかにされた)．

その後，膨大基数から始めて，マギドーはまた，各 $n < \omega$ に対して $2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+1}$ であるが，それでも $2^{\aleph_\omega} \geq \aleph_{\omega+2}$ である (したがって，$\aleph_\omega$ は GCH が崩れる最初の場所である) ような強制拡大を与えた．

よって，無矛盾性の強さの部分順序における "SCH でない" 場所は超コンパクト基数と多くの可測基数の間のどこかにあることになる．すでに述べたようにこれは線形順序ではないので，我々の主要体系について言えることは，すべて言ってしまったのだろうか．いや，そうではなく，この研究を続けることはたしかに興味のあることと思われる．

GCH

無限基数は $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots$ あるいは $\omega(=\omega_0), \omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_\alpha, \ldots$ で表される ($\aleph$ はアレフと読み，ヘブライ文字の 1 番目のものでこれはカントルが基数を表すために使ったものである．また ω は当初は別のものと思われていたが，現在はまったく同じものとされている．そしてこれは $\aleph$ のないタイプライターでは便利である)．ω はちょうど自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ にあたり，$\aleph_0$ とは ω のことである．

ここでは α はすべての順序数をとるものとするとき，$\aleph_\alpha$ の次の基数を得るには，$\aleph_\alpha$ への全単射が存在しないような次の順序数を探せば良い．するとそれが $\aleph_{\alpha+1}$ となる．極限においては $\aleph_\lambda$ を $\aleph_\alpha$ の $\alpha < \lambda$ にわたる上限とする (これは λ が $\alpha + 1$ の形でないときである)．常に次の基数 $\aleph_{\alpha+1}$ が存在することを示すにはベキ集合公理が使われる (λ が極限のとき $\aleph_\lambda$ を得るには置換公理が必要である)．しかしベキ集合はもっと大きな基数を作る直接的な方法を与える，すなわち $P(x)$ はかならず x より大きくなるのである (これがカントルの定理である)．選択公理によるとすべての無限基数はアレフのいずれか (また，有限のものは自然数のいずれか) である．

では $P(\aleph_0)$ はアレフいくつだろう? カントルはそれは $\aleph_1$ であると予想した (これはこれ以上は小さくなり得ない．そして彼は $\aleph_0$ と $P(\aleph_0)$ の間の基数をつくり出す方法を見つけ出せなかったのである)．これは連続体仮説 CH として知られるようになった (実数直線，あるいは連続体は $P(\aleph_0)$ と同じ大きさである，というのが名前の由来である)．これはヒルベルトの有名な問題のリストの 1 番最初のものである．$P(x)$ は x から $\{0, 1\}\,(=2)$ への関数全体の集合 ${}^x2$ と 1-1 対応がつき，基数のベキ $2^{\aleph_\alpha}$ は ${}^{\aleph_\alpha}2$ の基数として定義されるから，CH はちょうど $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ と表される．

一般連続体仮説 GCH は単にすべての順序数 α に対して $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ のことである．いいかえれば無限集合 x に対して x と $P(x)$ の間には基数がないということである．ゲーデルはもし ZF の公理が無矛盾ならこれも無矛盾であることを 1939 年に証明した．彼は構成可能集合 L を定義し ZF の公理のみを用いて L が ZFC のすべての公理と GCH をみたすことを示したのである．コーエン (Paul Cohen) は 1963 年にこの公理が (また CH さえも) ZFC の公理から証明できないことを示した．

今日，ほとんどの集合論研究者は GCH は単純すぎる解答であり，公理としては受け入れられないと感じている (これは選択公理が広く受け入れられているのと対象的である)．

● 巨大基数を必要とするその他の数学 ●

ほとんど自由なアーベル群　アーベル群 G がほとんど自由であるとは，それより大きさの小さい部分群がすべて自由であることをいう．このとき G が自由であると言えるだろうか？ その答えは G の大きさによる．すなわち，大きさが $\aleph_n$ なら答えはノーであり，自由でないほとんど自由なアーベル群を構成できる．G の大きさが $\aleph_\omega$ なら答えはイエスである．しかし大きさが $\aleph_{\omega+1}$ のときは，その答えは分からない．ノーという答えは ZFC と無矛盾であり，イエスという答えからは多可測基数の無矛盾性が導かれる．

飽和イデアル　ω_1 上のイデアル I が与えられたとき，それが ω_1-完全で非単項なら I の飽和数 $\mathrm{Sat}(I)$ を $\{X_\beta \mid \beta < \alpha\}$ のすべてが I の元でないということはないが，I-disjoint である (すなわち，$X_\beta \notin I$ であるが，すべての $\beta < \beta' < \alpha$ に対して $X_\beta \cap X_{\beta'}$) となるような最小の α として定義できる．これは，ブール代数 $P(\omega_1)/I$ の任意の反鎖は大きさが $< \alpha$ であるというのと同値である．GCH を仮定すると，明らかに $\mathrm{Sat}(I) \leq \omega_3$ である．では $\mathrm{Sat}(I) = \omega_2$ とはなり得るだろうか？ ω_1 が ω_2-飽和イデアルをもたらすという仮定の無矛盾性から多可測基数の無矛盾性が導かれ，またこの仮定は膨大基数の存在から導かれることが示されている．

非正規超フィルタ　ω_2 上の超フィルタ U はそのすべての元の大きさが ω_2 であるとき一様であるといい，$g : \omega_2 \to \omega_2$ かつ $\{\alpha < \omega_2 \mid g(\alpha) < \alpha\} \in U$ ならばある $\gamma < \omega_2$ に対して $\{\alpha < \omega_2 \mid g(\alpha) \leq \gamma\} \in U$ であるとき弱正規 (weakly normal)，また ω_2 個の U の元が存在し，そのどんな ω 個の共通部分も空集合になるとき (ω, ω_2)-正則という．膨大基数から始めて，マギドーは弱正規で一様な ω_2 上の超フィルタで (ω, ω_2)-正則でないものを構成した．これはまた多くの可測基数の無矛盾性を導くことも知られているので，これもまた強い数学的仮定の一例である．

ネバー・ネバーランド　巨大基数に対するネバー・ネバーランド (決して到達できない地) という呼び名 (マックレーンのみによるものではない) は，これらの巨大基数の大きさがどれくらいであるかを示す方法がないことからきていると思われる．そこで我々は κ が超コンパクトならそれは κ 番目の可測基

数であり，まったく同じ手法によってそれが“その下に可測基数の測度 1 の集合が存在する”という性質を持つ κ 番目の基数であることを示した．そしてこの方法はいくらでも繰り返すことができるのである．これは非常に典型的であるが，またときには無矛盾性の強さについてそのような結果が証明できる唯ひとつの場合でもある．

しかしこれは巨大基数に限ったことではない．それは ω_1 の大きさについて，ω_0 との比較で (あるいは任意の後者基数についてその前の基数との比較で) 説明しようとすることにもあてはまるのである．$\omega \times \omega$ が可算であるという事実は容易に順序数のベキ ω^ω が可算であることを示すのに拡張でき，またそれはいくらでも繰り返すことができる．そしてこれらのことは，ω_1 が ω からは手の届かないところにあると解釈できる．しかし，そうなると ε_0 も ω からは手の届かないところにあると言うこともできそうであり，このことは次のように正当化することができる．すなわち，多くの数学者は $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}$ がどんなであるかを知った後ですぐに ε_0 までたどり着くことができるが，このことは ε_0 について存在する多くの問題を解く鍵をほとんど与えることはないのである．

実際，ネバー・ネバーランドはもっと以前から始まっていたのだと私は主張する．アッカーマン (Ackermann) 関数のある記述においては，$A_5(3,2)$ は指数部に 2^{16} 個の 2 が積み上げられ，$A_6(3,2)$ では $A_5(3,2)$ 個の 2 が積み上げられる．そのような数について直接何かが知りたいなどと主張する人は核心をはずしている (そのような数がやって来たところには $A_{A_6(3,2)}(3,2)$ のようなものが無限個あるのである)．そのような想像のつかない数について直接何かを知る方法はあり得ない．我々がそれについて知っているのは，ペアノの公理が N で成り立つことを知っているからというだけのことなのである．そしてそれは ω や ε_0 や ω_1 や最初の到達不能基数や最初の可測あるいは超コンパクトや膨大基数について知る唯一の方法である．すなわち，ある公理が成り立つということである．なぜ膨大基数が $A_6(3,2)$ よりもっと到達できないところにあるのか？ 多分それは我々が膨大基数の無矛盾性よりはペアノの公理の無矛盾性の方をより確信しているというだけのことである．実際的な限界ということに関するかぎり，$2^{2^{16}}$ はすでにネバー・ネバーランドにあるのである．ギャンディ (Gandy) は［15］において知ることができることには

可測基数

1930 年にスタニスラフ=ウラム (Stanisław Ulam) は測度論を拡張してある集合 X の (ルベーグ測度同様) 可算加法的な測度で，X のすべての部分集合に対して定義されるもの (これは少なくとも選択公理を仮定するならルベーグ測度では起こらないことである) が存在するかどうかを問うた．この測度は自明なものであってはならない，すなわち X の点 (要素) は測度 0 であり，X 自身は測度 0 でないということで，このような例はみつかっていない．

ウラムはこの理由を示している，すなわちもしそのような測度が存在すれば到達不能基数が存在しなければならないのである．実際，そのような測度が存在するなら，0, 1 の 2 値しかとらない (間の値はない) ようなもので，その測度が乗るような最小の X の大きさが到達不能基数になるか，あるいは，測度が $P(\aleph_0)$ の上に乗り，$2^{\aleph_0}$ 以下の弱到達不能基数が存在するのである．

何年かの間，最初の強到達不能基数がそのような 2 値測度を持つかどうかは未解決問題であった．1962 年にタルスキ (Tarski) はハンフ (Hanf) の結果を用いて，それを持たない，すなわち κ が 2 値測度を持つ最初の基数なら (現在これは最初の可測基数と呼ばれている)，κ はすでに κ 番目の到達不能基数であることを示した．

ここで $\mu : P(X) \to \{0, 1\}$ が自明でない 2 値測度なら，$U = \{Y \subseteq X \mid \mu(Y) = 1\}$ は X 上の非単項超フィルタであり，測度の加法性は超フィルタの完備性とつながることに注意する．最初の可測基数 κ は実は κ-加法的な測度を持つ (紛らわしいことに，これは実は $<\kappa$-加法的，すなわちすべての $\lambda < \kappa$ に対して λ 個の交わりを持たない集合は加えられるということである)．これは単に可算加法的という以上のもので，今日，これが可測基数の定義として用いられている (重要な点は κ のベキ集合が可算加法的測度を持つなら，それより大きな基数もすべて持つということである)．しかしながら，κ が最初の可測基数なら，次の基数 κ^+ のベキ集合は明らかに κ^+-加法的な測度を持たず，したがって，2 つ以上の可測基数を考えることには意味があるのである．

おおむね限界があるという考えについて検討した．この仮定の下では大きな有限数と無限数の間に存在論的な差を見つけ出すのは困難であり，$A_6(3, 2)$ はたしかにネバー・ネバーランドにあるのである．

● マックレーンの論説への後書き

私の主張するところは，マックレーンの言及した数理論理学の分野はすべて無矛盾性の強さに関する部分順序を通して，基礎の部分と密接につながっているということである．ここで試みたのはそれを 3 つのトピック（“巨大基数のネバー・ネバーランド”の公理，“いろいろな組合せ論的性質”の独立性証明，そして“その泥沼がいかに深いものであっても”ゲーデルの構成可能集合の微細構造を調べること）について詳細に示そうということであった．実際は，再帰的関数が示した次数の階層についての探究という 4 つめの分野も 2 階算術のレベルでの研究に加えられる（私の考えではこの最後の分野はマックレーンの苦情に対する正当化の必要は最も少ないと思われる．特にこれは現在発展中の計算機科学とかかわりを持っている純粋数学の分野の 1 つであり，多くの再帰的関数論の研究者は理論計算機科学に対して貢献を与えている）．

これらすべてに対する私の結論は，次のようである．数学全般に対する展望を持つ数学者がいた時代にあこがれるマックレーン氏の感傷的な考えは，実際，現代数学の病であり，それによって，マックレーン氏自らの価値観にはそぐわない重要な専門化を拒んでいるのである．数学が細分化するのは避けられないことであり，“数学の統一”についての抗議は，“科学の統一”に対するのと同種の態度でのぞむべきである．つまり，異なる分野の間に関係を見出したものは報われるが，若い研究者がどこに向かおうとしているのかが見えないというだけの理由で彼らの進む方角を拒み，彼らの研究に対して，“専門にこだわりすぎている”とか“行き止まりかもしれないような横道に進んでいる”とかいったレッテルを貼ったりすれば，発展は歪められるであろう．

● 参考文献

[1] Saunders MacLane , The health of mathematics. *Math. Intelligencer*, **5** (1983) No. 4, pp. 53–55.

[2] L. Harrington and J. B. Paris , “A mathematical incompleteness in Peano arithmetic.” Handbook of mathematical logic. J. Barwise, ed. (North-Holland, 1977), pp. 1133–1142.

[3] L. A. S. Kirby and J. B. Paris , Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), pp. 285–293.

[4] E. A. Cichon , A short proof of two recently discovered independence results using recursion theoretic methods. *Proc. Amer. Math. Soc.* **87**, No. 4 (1983), pp. 704–706.

[5] D. A. Martin , Borel determinacy. *Ann. of Math.* **102** (1975), pp. 363–371.

[6] H. Friedman , Higher set theory and mathematical practice. *Annals of Math. Logic* **2** (1971), pp. 326–357.

[7] R. M. Solovay , A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. of Math.* **92** (1970), pp. 1–52.

[8] E. M. Kleinberg , Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness. *Lecture notes in Math.* (Springer) **612** (1977).

[9] K. Kunen , Elementary embeddings and infinitary combinatorics. *J. Symbolic Logic* **36** (1971), pp. 407–413.

[10] J. Silver , On the singular cardinals problem. *Proc. Internat. Congress of Math. Vancouver*, 1974, vol. 1, pp. 265–268.

[11] A. J. Dodd and R. B. Jensen , The core model. *Annals of Math. Logic* **20** (1981), pp. 43–75. Also, The covering lemma for K, ibid. **22** (1982), pp. 1–30; and, The covering lemma for $L[U]$, ibid. **22** (1982), pp. 127–135.

[12] D. J. Velleman , Morasses , diamond and forcing. *Annals of Math. Logic* **23** (1982), No. 2. pp. 199–281.

[13] K. L. Prikry , Changing measurable into accessible cardinals. *Dissertationes Math.* (Rozprawy Mat.) **68** (1970).

[14] M. Magidor , On the singular cardinals problem I. *Israel J. Math.* **28** (1977) No. 1, pp. 1–31. Also, On the singular cardinals problem II. *Ann. of Math.* (2) **106** (1977), pp. 517–547 .

[15] R. O. Gandy , Limitations to mathematical knowledge. In: Logic colloquium '80. D. van Dalen, D. Lascar, J. Smiley, eds. (North-Holland, 1982), pp. 129–146.

[16] A. Robinson , Concerning progress in the philosophy of mathematics. In: Logic Colloquium 73, H. E. Rose, J. C. Shepherdson, eds. (North-Holland. 1975), pp. 41–52.

[17] S. G. Simpson , Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations? *J. Symbolic Logic* **49** (1984) No. 3. pp. 783–802.

みんなただの専門家か？

ソーンダース=マックレーン (Saunders Mac Lane)

インテリジェンサー誌に載った私の論説『数学の健康』に対し，数理論理学の最近の発展に関心を持っているF. R. ドレイク氏が返答を与えてくれた．

私の論説は数学全般の健康問題を扱ったもので，事例として多少知識を持っているいくつかの分野を引き合いに出し，その中にロジックが含まれていた．一方，ドレイクはもっぱらロジックのみに関心を持つ．彼は，巨大基数が存在するという公理の無矛盾性の強さに関する最近の研究発展を，興味深いテクニカルな手法で紹介している．彼の解説は，この分野への入門としてはとてもすばらしいと思う．しかし，そこに書かれている諸結果は，ロジックと数学の基礎との関わりについての私の質問には答えていない．例えば，再帰理論が極端に技術的になっていると私は主張したのだが．

ドレイクは，数学の健康という一般的な問題になると，特に彼の論説の後書きにおいては，論議の種を撒き散らしている．彼はロジックを防衛することに夢中であり,「多くの再帰理論研究者は，理論計算機科学にも貢献している」と言って，この分野の研究者を擁護する．これは一面の真理ではあるが，計算機科学における俸給が魅力になっていることも事実である．また，再帰理論に残っている問題の多くがそれほど面白くないということかもしれない．この文の直前に，ドレイクは，再帰理論こそが計算機科学の成長に直接つながりをもつ純粋数学の一領域であると書いている．しかし，他の多くの分野でも計算機科学との関わりを持つ，あるいは持とうとする試みがあるので，これはかなりの誇張である．実際，普遍代数学の研究者は，多ソート普遍代数

こそが計算機科学のデータタイプを扱うための最適の手法であると主張しているし，またグラフ理論や組合せ論のその他の領域は計算機科学において実際に活用されている．私自身はまだ確信しているわけではないが，圏論が計算機科学にとって有用になると主張している人たちもいる．いずれにしても，再帰理論の研究者だけが計算機科学と接触をもっているわけではない．さらにいえば，計算機科学の激しい動きのなかにある変わりやすい流行と関係しているという，そんなはかないことで数学の健康を診断していいだろうか．

この後，ドレイクは「数学は必然的に細分化する」という彼の感想を述べた．これは，私にとっては絶望の勧めに思える．我々の研究がバラバラの断片で終わっていいとは考えるべきではない．もちろん，現時点では数学者に対しさらなる専門化への圧力が相当強い．多くの専門領域において研究の進歩は目覚ましく，そこで新しい結果を生み出すためには，それまでの成果について膨大な知識を身につけなければならない．これが圧力を生じる一因になっている．例えば，代数幾何においてグロタンディクの仕掛けを使いたいとすると，その使い方を修得するにはちょっと 2 年や 3 年ではすまないだろうし，群の表現についてのハリッシュ=チャンドラ (H. Chandler) の方法についても同様である．しかし，専門化の必要を考えている若い人たちは，次のことをこころしておくべきだろう．多くの専門領域ではすぐに研究課題が尽きてしまうほど急激な研究が行われる傾向がある．私の経験で，これにあてはまるケースは，点集合トポロジー，普遍代数，圏論のいくつかの領域 (モナドやトリプルの理論) である．活発な長いキャリアを持つためには必然的に専門領域を変えていく必要がある．それが数学の進歩というものであろう．また，進歩の途中には，専門が重なり合うことが望まれる状況も生じる．例としては，理論物理と微分幾何におけるヤン・ミルズ方程式の間の驚くべき関連性がある——特に，4 次元実数空間 $\mathbb{R}^4$ に複数の可微分構造があることが分かった．

私の論説がロジックに関して論争を呼ぶことになったのは，数理論理学がもはや完全に数学の基礎と無縁になったと私が書いたからであるが，ドレイクはこの点に注目し，エイブラハム=ロビンソン (Abraham Robinson) の 1973 年の論文を取り上げた．これはたしかに数学の基礎に関連した興味ある論文であるが，私が言いたいのはこういう論文が非常に少ないということである．

彼の論説の中心部分である無矛盾性の強さは，数学の基礎に関してはささいであまり標準的でない問題を扱うだけで，多くの数学者が望むような基礎の議論には関係しない．ドレイクの解説では，研究現場の数学者にとっての正しい証明は，要するに第1階述語論理とツェルメロ・フレンケル集合論 (ZFC) の公理によるものだそうであるが，これは多分重大問題である．ZFC が数学を基礎づける出発点であると今日のロジシャンたちは考える．しかし，現場の数学者のほとんどはこの公理系を使っていないのだ．彼らはまずツェルメロ・フレンケルの公理が何か言えないだろうし，特にツェルメロ・フレンケルとツェルメロの違いを知らないだろう．そして，もしこれらの違いを知ったら，より単純でしかも普通の数学には十分なツェルメロの公理系を彼らは選ぶと思う．フレンケルの名が足された体系 (スコーレム (Albert Thoralf Skolem) にも負う) には，置換公理が付加されるが，それは大きな順序数や基数などドレイクの興味対象を扱うために必要なだけである．ツェルメロの公理系の核は内包公理であり，それは，ある集合とその元に関するある性質が与えられたとき，その性質をみたす元だけを集めて部分集合を作ることができるという主張である．ここで,「性質」というのは，第1階述語論理の論理式で表現できるものをいう．ロジシャンがちゃんと考えない基礎的な問題の1つとして，ここでの性質の規定が一般的すぎるということがある．普通の数学で使われる大概の性質は，第1階述語論理式で表したときに量化記号が限定されたものになる．すなわち,「すべての実数」とか「すべての自然数」というような限定された量化記号だけを使い，すべての集合を動くような量化記号は決して出てこない．ツェルメロの公理をさらに弱めるようなことは，ロジシャンによって無視されてきた基礎に関する真の問題例であろう．そのような問題は他にもたくさんある．例えば，グロタンディク派の代数幾何の研究では，巨大圏の考察を必要とする (アーベル群全体の圏は，巨大な宇宙においては集合である)．1つの宇宙を使うと，ある宇宙を別の宇宙の上におくようなことがしたくなるが，何か他にもっといい方法もあるだろう．これはまさに基礎的な問題である．

しかし，本質な問題はもっと深いところにあるかもしれない．集合論は本当に数学の基礎として適当だろうか？ いままでも他の基礎づけの提案はあったが，ほとんどのロジシャンはそれらをノー天気に無視してきた．私が主張

している真の基礎論は，そのような異なる基礎づけを活発に比較検討するものである．

このことは，ロジックの研究が数理哲学の問題とほとんど無縁になっていること (これはドレイクも認めている) にも関わっている．実際のところ，今日の数理哲学には重要な学術研究がほとんどない．それがどうして集合論の問題に関係するかというと，ツェルメロ・フレンケルの集合論に対するロジシャンの信仰は，現実世界の外に彼らの公理が適用できるような，あるいは多分巨大基数の公理が使えるような集合の宇宙があるというプラトン的空想に依るものだからである．私は，集合の実宇宙といったプラトン的理念は，まったくの戯言だと思う．数理哲学がロジシャンの技術的な思索の中に反映されうる可能性に対し，ロジシャンがもっと注意を向けるべき時期が来ている．

マックレーン氏への反論

クレイグ=スモリンスキー (Craig Smoryński)

百花斉放，百家争鳴　(毛沢東)

最初に，この文章を書くにいたるまでの議論の流れを簡単におさらいしておこう．口火を切ったのは，1983年にインテリジェンサー誌に載ったソーンダース=マックレーン氏の論説『数学の健康』([1])である．マックレーンの論点は，数学が「牧師の鶏卵」のようなものであって，すばらしい部分もあるが，頑迷な専門化のために大部分はひどい状態にあるというものだ．この論説の大半は，がらくたのカタログのようなもので，そこには次のコメントが付けられていた．

> これら手に負えない数学の分野でも，それぞれの専門家は私には多分理解できないような目的を持っているだろう．それでも，暗闇の中で苦闘するケースが多すぎると思うし，それが専門への頑迷な執着の代価なのだと私は指摘したい．

論説の最後には，可能な治療法が述べられているが，それらは建設的な意見というより，感傷の詠嘆にすぎない．

マックレーンへの最初の返答は，1985年にインテリジェンサー誌に載ったウィリアム=ブラウダー氏の論説『数学の診断』([2])である．ブラウダーが反論する点の1つは,「行き詰まりになっているかもしれない横道を探索する」ことで専門化が進行するというマックレーンの嘆きである．ブラウダーは次のように述べている．

> 数学の各方面の研究に対する時価を鑑定することは，研究者の個人的

> 見解で行うにしろ，資金を配分する行政的な立場で行うにしろ，最も重要な課題である．その際，流行に引き寄せられる力はとても強い．たしかに，活力のある発展こそが流行を作るという面もあるが，もしホットなテーマだけにすべての労力と資源が集中したら，次の方向転換のための下準備はどうやってできるのだろう．

ブラウダーは，最近のトポロジーの目覚ましい発展が，発表当時はあまり注目されなかったR. H. ビングの仕事に根差していることを述べている．

同じ号に載ったマックレーンの返答([3])には，ほとんど何も主張がない．

ドレイク氏の論説([4])は,「頑迷な専門分野」の「頑迷な専門家」の1人による防戦とみなせるかもしれない．その「頑迷な専門分野」とは,「ネバー・ネバーランド」に住んでいるといってマックレーンが中傷する巨大基数の研究([1])である．実は，マックレーンは「数学の基礎に対する当初の関心をほぼ完全に失っている」と言って，数理論理学全般を非難しているのである．ドレイクの論説は「数学の基礎とは何を意味するのか」というセクションで始まっているが，これについてはあまり語らずに，次のようなことを述べている．まず，証明できること，できないことをはっきり特徴づけるべきだということ，普通の数学で証明されることはZFC (ツェルメロ・フレンケルの公理ZF＋選択公理AC)で確実にとらえられること，しかし，ZFCはほとんどの数学には強すぎるが，一部には弱すぎて，それゆえ他の理論を考えなければならないこと．そして，巨大基数に対する特別な関心の下で，特別な理論に数学の実際を合わせようという試みをもった最近のロジックの研究を解説する.「マックレーンの論説への後書き」では，再帰理論が「計算機科学の成長に直接つなりがりをもつ純粋数学の一領域である」という不適切な誇張もしているが，それ以外に2つの有効な注意を述べている．1つは，マックレーンが自分の大切だと考えるものに関係なければ，重要な専門化も拒絶するということ．それから，もう1つは次のように言っている．

> 数学が細分化するのは避けられないことであり，“数学の統一”についての抗議は，“科学の統一”に対するのと同種の態度でのぞむべきである．つまり，異なる分野の間に関係を見出したものは報われるが，若い研究者がどこに向かおうとしているのかが見えないというだけの理由

で彼らの進む方角を拒み，彼らの研究に対して，“専門にこだわりすぎている”とか“行き止まりかもしれないような横道に進んでいる”とかいったレッテルを貼ったりすれば，発展は歪められるであろう．

ドレイクの最後の部分からの引用

これに対するマックレーンの返事がインテリジェンサー誌［5］に載ったが，それは不誠実さと誤った情報で病んでいる．主なポイントは，次の 5 つの引用にまとめることができる．

(i) 私の論説がロジックに関して論争を呼ぶことになったのは，数理論理学がもはや完全に数学の基礎と無縁になったと私が書いたからである．

(ii) 彼 (ドレイク) の論説の中心部分である無矛盾性の強さは，数学の基礎に関してはささいであまり標準的でない問題を扱うだけで，多くの数学者が望むような基礎の議論には関係しない．

(iii) そのような問題は他にもたくさんある．例えば，... 巨大圏 ... 1 つの宇宙を使うと，ある宇宙を別の宇宙の上におくようなことがしたくなるが，何か他にもっといい方法もあるだろう．これはまさに基礎論的な問題である．

(iv) いままでも他の基礎づけの提案はあったが，ほとんどのロジシャンはそれらをノー天気に無視してきた．

(v) 今日の数理哲学には重要な学術研究がほとんどない.... 数理哲学がロジシャンの技術的な思索の中に反映させうる可能性に対し，ロジシャンがもっと関心を向けるべき時期が来ている．

集合論以外でも数学者が専門を防御しようとすれば，マックレーンは同じようにその専門に対して破壊的な批判を繰り広げるだろう．たまたまマックレーンが批判したのは，数理論理学 (の全般) だった．でも，これは単なる偶然だろうか？ 論文［5］において，マックレーンは［1］について次のように述べている．「私の論説は数学全般の健康問題を扱ったもので，事例として多少知識を持っているいくつかの分野を引き合いに出し，その中にロジックが

含まれていた.」ところが，マックレーンがこの話題について発言しているのは,［1］と［5］だけではない. 1986年の記号論理学会誌 (JSL) の第4巻［6］には，その前年のワシントンの会議における彼の講演の要旨が収録されている．それは次のように始まる．

> 記号論理学会は，基礎論や数理哲学への関心が高かった時代に創立した．その頃は，この種の問題への興味から多くの人がロジックを研究していた．しかし，最近のロジックの研究は，技術的により深い結果を見つけるという差し迫った課題に汲々としている.... そうこうするうちに，基礎論と数理論理学の本来の問題は，巨大基数の知識とかベキ集合の繰り返しの必要性といったものがほとんど役立たないために，すっかり萎えてしまった．

さて，これをどうまとめればいいか？ 大きな論点は，数学の健康問題と，それがマックレーンの数理論理学批判にどう反映しているかにある．より細かい点は，(i) から (v) の引用に挙げられる．マックレーンの批判について，私は1つ1つ対処すべきなのだろうか？ 数学一般について考えるべきか，それともロジックに話を限定すべきか？ そもそもこの2つを分けて考えることはできるのだろうか？

マックレーンに立ち向かう際の問題点は，ブラウダー［2］も指摘しているように，彼の言うことはある程度真実だということである．そこで，最初の問題は，どのくらい真実かということになる (次に，その状況において我々が何をしたらいいかが問題になるが，ここでそれは議論しない).

そのとおり．ロジックは，たしかに数学の基礎から離れてしまった．どうしてそうなったか？ どれくらい離れているか？ それはいけないことか？

最初の問いには，たくさんの答え方があるが，まず数学を取りまく社会的な背景からの答えを考える．アメリカは第2次大戦中に大勢の科学者をヨーロッパから受け入れ，またNATOが支援するヨーロッパの夏の学会はそのお返しをする目的もあったので，話をアメリカの状況に限定することを許していただきたい．アメリカにおける数学の頑迷な専門化に悪いところがあれば，それはすべて1960年代におけるお金の無駄使いに起因していると思う．数学は出世第一主義者を魅了した．彼らは問題を解く訓練を受け，困難なもの

以外を貶した．数学の歴史や哲学については何も学ばず，そんな知識は彼らの出世には役に立たないと悟っている．私が学生の頃，そんな出世第1主義者の1人が私にアドバイスをくれた.「成功への道はその分野の有名人が手がけながら未解決に残されている問題を探すことだ」と．数年後，私はわずかな努力で名声といい職を得た．私は彼を冷笑的だと思ったし，彼は「興味が持てなかったらどうするの」という私をちょっと頭がおかしいと考えたに違いない．

ロジックの場合，マックレーン［1］もいうように，他の数学から仲間はずれにされているので，状況はもっと極端である．哲学的な興味を少しでも顕わせば「哲学者」のレッテルを貼られる．主要大学の数学科(マックレーンの所属する大学を含む)は，技術屋だけを採用する．多少哲学的傾向のあるロジシャンは，哲学科に所属して数学基礎論に専念することをやめるか，講義をたくさん持たされ研究の時間を与えられないような大学に所属するしかない．さらに，主要な数学教室だけがいい学生を集めて，研究者のほとんどを輩出するので，ロジックでは技術屋しか生まれない．こういうシステムの下では，ロジックにおいて哲学のない技術的な研究が優位に立つのは当然である．

哲学的なロジシャンもいるが，技術的なロジシャンほどには1人当たりの論文生産量は多くない．その理由は，哲学的なロジシャンの怠惰によるかもしれないが，どんな問題でもいや応なしに仕事にしていく技術的なロジシャンの性急さによるとも考えられる．私個人としては，興味が持てない問題を研究することはできない．私の興味は哲学的な傾向のあるロジシャンとは異なっていると思うが，技術屋よりは彼らの方により親近感を持っている．にもかかわらず，ロジックの優れた結果は，たとえ哲学的な意味合いを持っているとしても，みんな技術屋から生まれているのだ．哲学は，人を導くだけでなく，抑制もする．無矛盾性に関する自分の仕事の哲学的重要性について語るロジシャンは，あまり仕事をしない言い訳をしているにすぎない，という皮肉な見方を支持するのは公平でない．いつでも意味のある仕事ができるものではない．技術屋なら道具を研いでおけば，機会ある毎にそれを用いることができるだろう．数学のどの分野の仕事も大半は，高度に技術的ながらくたにすぎない．いいものと悪いものを分別することは，生産を仕事とする研究者の責任であるよりは，学識者の責任である．数学は極端に学識を欠い

ている．

いつの間にか，私は「それはいけないことか？」の問題を扱っていたようだが,「どうしてそうなったか？」の答えがまだ完成していない．最も簡単かつ明瞭であって，議論の余地のない説明はこうである．ロジックは，現在，そして過去のほとんどにおいても，また将来もずっと，基礎論でも数理哲学でもない．ここでは過去と未来の話は跳ばして，今日のロジックだけを問題にしよう．応用数学としてのロジックは，計算機科学，言語学，哲学 (数理哲学に限定しない)，そして数学 (基礎論に限定しない) に応用を持っている．純粋数学としてのロジックは，ロジックに源を発する技術的な研究を維持している．しかし，マックレーンがいうように，ロジックが数学の基礎や哲学に主要な関心を持たない本当の理由は，ロジックがそれら以外に正当な関心事を持っているからである．

そういっても，数理論理学が数学の基礎に対してほとんど無関係になったという意見は受け入れられない．実際，マックレーンは (ii) の点において誤解しており，ドレイクは，説得的ではないにしても，基礎論的な仕事の例もちゃんと明示している．これを議論することは，結局 (iv) を議論することでもあり，そのためにはまず「基礎論」が何かについて合意を作っておく必要がある．合意が得られるかどうか分からないが，ZFC (ツェルメロ・フレンケルの公理＋選択公理) は，集合論と圏論の一部を除いた数学のすべてがそこで展開できるという意味で，数学の基礎の 1 つであると私は考えたい．ZFC でやらなければならないとか，それが数学をするための自然な環境を提供しているなどというつもりはない (そんな考えを持ったロジシャンを私は知らない)．言いたいことは，数学のある分野の基本概念を持ってきて，それを ZFC の中に翻訳すれば，その基本的な性質はすべて ZFC において証明できること，そしてそれらの性質から別の性質を ZFC を意識しないで普通に導けるといったことである．これができるというのは，ロジシャン特に集合論の研究者の根拠のない自慢話ではない．ラッセル (Bertrand Russel) とホワイトヘッド (J. H. C. Whitehead) や，ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の事例研究によって証明されている事実なのである．

ロジックは，証明の概念に対する明瞭かつ正確な記述を与えることにより，

数学の基礎となる．それは，実際の知識を体系化する試みではないし[1]，また数学者がZFCの公理から形式的な証明を作っているとか作るべきだとかいう主張でもない．数学者が集合論の境界を越えるまでは，ZFCが彼らが到達できるものの1つの上界であるといっているにすぎない．

ZFCの問題は，それがとても強力すぎるという点にある．集合論と圏論を除いた実際の数学は，もっとずっと弱い体系で扱うことができる．マックレーンの注意［5］(［4］で引用されている) に反して，このことは積極的に研究され，実際の数学を記述するためにもっと適した形式体系を見つけようとしているロジシャンもいる．またこれとはまったく反対の研究をするロジシャンもいる．インテリジェンサー誌の私の論説［7］で述べ，また［1］に関する編集部への私の手紙［8］においてもほのめかされているように，ZFCの過度の強さを認めた上で，これ以上の強さを普通の数学で使うことがあり得るかという問題がある．このプログラムは，次のように明白なものである．まず強さの概念 (ベキ集合の繰り返し，巨大基数) を確定し，概念の相対的な強さ (無矛盾性の強さ) を判定し，それからこの強さを必要とする応用 (ボレル決定性，ボレル対角化，決定性) を数学の中に探す．ドレイクの論文にもあるように，最初の2つのステップは進んでいるが，3番目は始まったばかりである．これは基礎論ではなく，反基礎論であるという冗談があり，先の手紙で私もそう述べた．しかし，数学の基礎に関してささいであまり標準的でない問題を扱っているとは考えられない．

マックレーンの3番目のポイントは，ロジシャンが無視したという基礎的な問題を指摘する．まず，［5］の (iii) の引用の直前に書かれていることは，まさにここ数年にロジシャンが研究して成果をあげた事柄であり，ロジシャンが無視したというのは間違った言明である (これは，実際の数学に見合った弱い理論を見つけるという問題である)．(iii) 自体の問題に関して，マックレーンの著書『Categories for the Working Mathematician (数学を研究する人のための圏論)』において「宇宙 (universe)」という語を調べた．彼の与えた定義は，明らかに次のように言い換えられる．集合 X が宇宙であるとは，ある到

[1] 解析幾何は，ユークリッド幾何の実際を組織化するものではない．しかし，解析幾何によって幾何が代数に還元されることはだれも否定しない．

達不能基数 κ が存在して，$X = V_\kappa$ と表せることをいう[2]．ある宇宙を別の宇宙の上におくというのは，多くの到達不能基数の存在を意味する．宇宙に関するもっと強い閉包条件がほしければ，巨大基数を仮定すればよい．

マックレーンは，多分，圏全体の圏のようなものを考えて「巨大圏」と呼んでいる．そのような自己適用は，組合せ論理，λ 計算，最近話題の「真理の理論」などにおいて，ロジシャンが研究してきた事柄である．否定を無制限に使うようなことがなければ，自己適用の矛盾ない扱いは難しくない．否定があるとラッセルのパラドックスに妨げられ，それを避けることはロジシャンにもできない．

ロジシャンの私は，(iv) で言われているように他の基礎づけの提案をノー天気に無視してきたことに罪の意識を持たなければいけないらしい．彼の言いたいことが何か私にはよく分からないのだが，多分，彼は数学の知識を圏論的に体系化するような「代数的基礎論」を考えているのではなかろうか．もしそうだとしたら，なぜロジシャン自身が，解析学者よりもそれに特別な関心を持たなければならないのか．彼らだって，基礎論とほとんど無縁になる以前，つまり彼らの基礎的な問題を彼ら自身が解くようなるまでは，基礎論の保護者だったのだ．

さて，いよいよ 5 番目の引用だが，ここにはマックレーンの論点が 2 つある．1 つ目は,「今日の数理哲学には重要な学術研究がほとんどない」ということだが，これは本当だろうか？ チモシュコ (Tymoczko) 編の最近の論文集[3]『数理哲学の新しい方向』には，1950 年代の論文が 3 本，1970 年代のものが 12 本と 1983 年のものが 1 つ収められている．これらの論文は，数学者，哲学者，ロジシャン，計算機科学者，数学の歴史家によって書かれており，そのほとんどは学術的である．私は全部を読んだわけではないが，どれも真剣で[4]，熟考されており，単に意見を出すのではなく結論を導いている．フィリップ=デイビス (Philip. J. Davis) とルーベン=ハーシュ (Reuben. Hersh) の 2 冊の本は，それほど重々しくなく，少なくとも表向きはそれほど学術的ではないが，

---

[2] V_κ と到達不能基数については，ドレイクの論文 [4] を参照．

[3] 数学インテリジェンサー誌の彼の最近の記事 (第 8 巻第 3 号 1986 年 44 ページから 50 ページ) も見よ．

[4] 冗談めいたものでも．デイビスとハーシュの論文を参照．

やはり数理哲学の正当な活動として (証明のラカトシュ (Imre Lakatos) 的懐疑を誇張しすぎていると思うが) 数えておきたい．主に科学哲学を扱ったものだが，イムレ=ラカトシュの論文集は，数理哲学を真剣に志す学生は読んでおくべきである．それから，ちょっと強引かもしれないが,『証明と反駁』も加えておきたい．他にもまだあるけど，この辺で．

マックレーンの最後の論点はもっともではあるが，なぜその命令をロジシャンだけに向けるのか？ なぜ次のように言わないのだろう．

> 数理哲学が数学の技術的な思索の中に反映さえうる可能性に対し，数学者がもっと関心を向けるべき時期が来ている．

ここで，もちろん「数理哲学」は「数学基礎論」のことではない[5]と断っておく．応用数学では問題の責任を応用する分野に帰すことができるが，それ以外はなぜそんなことをしているのかという問いをときどき自らに発すべきである．自分の研究を導いている哲学的前提，いやジェラルド=ホルトン (Gerald Holton) 風に主題的 (thematic) な前提は何であろうか？

私は，目的と主題について話し出してしまった．数学はとても魅惑的な題材である．それは何をしているのか考えなくてもできてしまうほど気軽だから，目的のない活動になりやすい．フェルマーの定理に関するハロルド=エドワード (Harold Edward) の本がでたとき，私はベッドの上に何時間も座って，電卓を使って円周等分多項式の因数分解の計算をしたことを思い出す．それはとてつもない享楽であって，それをするのに特別な理由はいらなかった．今世紀の偉大な哲学的論理学者の 1 人ポール=ベルナイス (Paul Isaak Bernays) は，ブール代数中毒者であると聞いたことがある．一度ブール代数で遊び出すと，何日もそれを続けたものだったらしい．気晴らしの行為も，それがそう理解されているなら，悪いことではない．しかし，研究課題となれば，その値打ちは疑わしい．

数理哲学は，一時は基礎論とも関係を持っていた．今日，哲学者の多くは彼らの認識論の試験台として数理哲学に興味を持っているにすぎず，また私もそうだが，ほとんどの数学者は数理哲学をつまらないものと考えている．

---

[5] チモシュコの論文集において，このことは力強く説得的に議論されている．

しかし，チモシュコ編の論文集では，科学哲学に追いつこうとする試みの始動が見られる．科学哲学は，素朴で規範的な子供だまし (ジョン=スチュアート=ミル (John Stuart Mill) の科学的推論の法則など) からの離脱に成功し，かなり巧妙な記述理論 (ポッパー (Karl Popper)，ラカトシュ，クーン (Thomas Kuhn)，ホルトンなど) を持っている．数理哲学は，その記述的な面を完璧にすると共に，目的と主題を議論していくべきである．科学哲学では，少なくても表面的には目的や主題は明らかなので，それらを議論することはあまり重要ではなかった．

物理のような分野では，自分の仕事を通して誰しも自らの研究の前提が何かを意識するし，哲学が熱心に議論されるので，その分野の哲学的問題を有能な哲学者に委ねることもできる．しかし，数学はそうではない．我々が数学やお互いを理解するために大切なことは，数学を考えるのと同じくらい深く数学の活動についても考えることである．あなたは問題解き屋か？ それとも何かプログラムをもっているのか？ 後者なら，なぜそのプログラムなのか？ それで何をしたいのか？ そのプログラムが実行可能であるとなぜ思うのか[6]？ ジェラルド=ホルトンの『科学的思考の主題的起源：ケプラーからアインシュタイン』は，そんな私の愚問よりもいい手引きになるだろう．数学の専門を越えて，主題や目的，目標などについて話し合うことは，数学の結果を話し合うより，数学の結束にとって大切である．それは，証明についてのほとんど不可能な話し合いより，きっと役に立つ．

このような理解は，数理哲学が未成熟な記述面を乗り越えて発展するために絶対不可欠である．いや，生き残るために必要かもしれない．あまり知識はないが力のあるよそ者の攻撃に対し，自分の専門を守らなければならない役が次にはあなたにくるかもしれない．残念だけど，私は次のように言わなければならない．マックレーンの哲学は，権威者のドグマ以外の何ものでも

---

[6] 理由がばからしくても慌てるな．アインシュタインの指導原理の 1 つは，数学の単純さにあった．「リーマン計量を仮定し，その計量がみたすべき最も簡単な法則は何かと尋ねたら，空なる空間の重力の相対論に到達する．その空間で，ベクトル場やそれから導かれる反対称的なテンソル場を仮定し，その場がみたす最も簡単な法則は何かと尋ねたら，空なる空間のマックスウェルの方程式になる.」なぜ私が一般連続体仮説が成り立つと思うかについて説明してみたくなる．でも，みんなに笑われるのは怖い．

ない．[1] をもう一度よく読むと，次のように書かれている．

> さらに批判的に言えば，数学がどちらに向かってどう進めばいいかという一般の合意がないように思える．

そして，例を挙げてから言う，

> この例は，どうやって数学をするか，またどういう方向に進むかということに一般の合意がないことを示しているが，実は他の科学はもっと悲惨な状況であることが分かった．

マックレーンが，正しい数学のやり方に対する異なった立場として引用している例は何だったろう．こうである．

> 私 (マックレーン) は，標準的な数学者のスタンスを取った．すなわち，興味の対象を明確にし，必要な公理系を設定し，使う言葉を定義しなければならない[7]．ところが，アティヤは理論物理学者のスタイルを好んだ．(中略) 彼らはアイデアついて話し合い，様々な関連性を進展させて，最終的にもっと柔軟で豊かな概念にたどり着く．

これが本当に悲惨な状況なのだろうか？

マックレーンがブラウダーに最後の質問「誰が診断するのか？」をした際，ブラウダーが数学を科学であるとしたのは間違いだと言っている．自由は無政府主義的な物理学者には許されても，数学には統一が必要である．誰の数学診断が，統一の形を決めるか？

●参考文献●

[1] Saunders Mac Lane , The health of mathematics, *Mathematical Intelligencer* **5**, 4 (1983), 53–55.

[2] William Browder , Mathematical judgement, *Mathematical Intelligencer* **7**, 1 (1985), 51–52.

---

7 「標準的な (standard)」と「しなければならない (must)」の言葉遣いに注意せよ．

[3] Saunders Mac Lane , Whose mathematical judgement? *Mathematical Intelligencer* **7**, 1 (1985), 52, 76.

[4] F. R. Drake , How recent work in mathematical logic relates to the foundations of mathematics, *Mathematical Intelligencer* **7**, 4 (1985), 27–35.

[5] Saunders Mac Lane , Logic is neither foundations nor philosophy, *Jounal of Symbolic Logic* **51**, 4 (1986), 1008.

[6] Craig Smoryński , What's new in logic?, *Mathematical Intelligencer* **7**, 3 (1985), 53–54.

[7] Craig Smoryński , Letters to the editor, *Mathematical Intelligencer* **6**, 3 (1984), 5.

数学のさらなる健康のために

ソーンダース=マックレーン (Saunders Mac Lane)

スモリンスキー氏が，この直前の記事で，数学の健康に対してでなく，マックレーン個人に反論しているのを読み，嬉しく思っている．数学の健康について私が最初に書いた論説［7］は私自身を恰好の標的にしてしまったが，ロジシャンたちが声を上げるのはいいことだ．

しかし，我々はいまも健康維持団体 HMO (Health Maintenance Organization) を必要としている．数学の公的な報告書は，デイビッド (David) のすばらしい報告［3］に見られるよう，数学の目覚ましい発展や将来の可能性について正しく述べている．しかし，我々はこの分野の難点にも目を向けるべきであろう．それが私の論説の目的であったし，頑迷な専門化，過剰な出版，暗闇の苦闘が今日蔓延していること，すなわち新奇さだけで洞察を欠いた方法で技術的成果が出されていることを私は訴えたかったのだ．どんなときにでも，専門化は避けられない．しかし，頑迷な専門化は次のようにして生まれている．数学を専攻する若者が，ある活発な分野で研究生活を始める．そのうち，研究費や定職を得るために，いわゆる査読付き雑誌に多くの論文を発表することが必要だと知る．すると，次の研究成果を早く出すことへの焦りから，始めた分野から動けなくなるのだ．その分野の主要なアイデアが掘り尽くされてしまっても，なおその状態が続くのである．

数学の研究者のほとんどは，多分スモリンスキーも，この現象のいくつかの事例をご存じだろう．しかし，過剰な専門化の例として私が最初に挙げた分野のリスト ([7]) については，彼は同意しないようである．グラフ理論，特

にその社会学への応用，(集合でなく) 圏における有限状態機械の理論，フランスで行われていたような圏論，組合せ論スタイルの普遍代数，階層の微細構造 (fine structure) や構成的集合の泥沼 (morass) などの数理論理学の分野がそれであった．読者諸氏にもっといい例を挙げていただきたいと思う．私としては，最近ファジー・トポロジーなるものを知った．一般位相空間におけるストーン空間の性質は，ファジー位相空間に拡張できる．しかし，私はそんな空間の実例を 1 つも知らない．また，半群論は自由半群を通じて形式言語の語の研究にとても役立っているが，理論はこの応用を越え，そして半群というかなりゆるい代数構造による束縛も飛び越えて拡張されている．1930 年代の関心の的だった束論の研究は今日も続いていて，ときには深い定理もあるが，多くの場合は孤立している．代数のいい例をはっと思い出した．かなり昔，エミール=ポスト (Emil Post) [10] は「3 項」群の研究をしていた．普通の 2 項演算の掛け算を 3 項 (もしくは n 項) の演算に置き換えるものである．この研究は盛んにならなかったが，最近東欧の数学者が n 項演算の合成をもつ n-圏を導入して調べている．しかし，私はその実例を 1 つも知らない．

集合論的トポロジーも，過剰に押し進められた専門化の例になるだろう．位相空間論は基本的に大切であり，いろいろな空間 (距離，ハウスドルフ，位相，一様など) を考えるためにふさわしい．しかし,「空間」に対する理想的で最終的な概念は存在しないので，結局，その研究の重要性は，他の数学 (解析，幾何，多様体論，など) における利用によって生じる．これらの関係は，双位相空間，正規ムーア空間などの特殊なトピックへの関心まで正統化するとは思えない．R. L. ムーア (Robert Lee Moore) の狭いものの見方から生じた過剰な孤立は，この領域の頑迷な専門化を促進させた．

各々の専門において多数の会議が開かれ，その分野に遅れないためにそのほとんどに参加しなければならないという状況も，専門化への圧力を増大させている．その結果，何度も同じ人の話を聞いて，一般的な会合に行く時間とお金がなくなる．あるいは，アメリカ数学会の全体会議に行っても，自分の専門に関連した活動の分科会にだけ出席することになる．

スモリンスキーは，記号論理学から選んだ私の例について集中的に攻撃している．この盛んな研究分野の忠実な活動家たちが反論してくるだろうとは予想していた．にもかかわらず，それを引き合いに出したのは，ロジックに

おける孤立(と専門化)は他の数学分野よりずっと長く続いており，数学のいたるところで存在している問題を最も鮮明に例示できると思ったからである．前に述べたように，数理論理学者は，数学基礎論や数理哲学に対する彼らの研究の大切な関わりを本当に軽視してきた(この関わりが，私自身がこの分野に長く関心をもつ動機になっている)．幸いこの状況は私の論説［7］が出版されてから5年の間に明らかに好転した．それは私の論説のためではなく，ハーヴィー=フリードマンと仲間たちの仕事［5］に見られるよう他の人の努力によるものである．

巨大基数の存在を主張する公理は最近著しい結果を生み出しており，これをドレイクやスモリンスキーはロジシャンが基礎論に関心をもっている例として引用するのだが，巨大基数はネバー・ネバーランドに棲むように思えるので私には納得できない．そのようなとてつもなく大きな基数を仮定すれば興味ある具体的な問題が解決するということで，私の友人のかなり多くは私の意見に反対である．しかし，他の友人は，問題を解くためにどっちの方向を選ぶかというような根拠のない思索を必要とする問題は扱わないようにしている．集合論が実際の数学の究極の基礎であるとは思えないので，私は後者の友人と同感である．友人の1人は，もっと辛辣に次のように言った．巨大基数を使った判定は,「UFOに乗ったハンサムな火星人たちが，我々の親しんでいる空を頻繁に航空している」という公理から10代の妊娠の増大を説明するのと同じくらい存在論的な強引さがある．

ロジシャンたちはいろいろなところで興味深い結果を多数うち立てているが，まだやり残している仕事がある．そのリストを以下に示そう．

1. 圏論　すべての圏からなる圏や巨大圏の関手圏といったような巨大な構成をうまく扱うための実効的な基礎づけに対する必要性がある．これらの構成は，例えば代数幾何のグロタンディクの論法の大部分で必要とされる．通常は，多くの宇宙の存在を仮定することで，この困難を一時的に取り繕っている(スモリンスキーが1つの到達不能基数で1つの宇宙が得られることを気づいてくれたのは嬉しい)．でも，宇宙によるこうしたアプローチ自体があまり気持ちのよくない繕い仕事である．各宇宙毎に理論をつくり直したいと思う人はいないから(型理論におけるよく知られた問題点である)．関手圏につい

ての問題は，何年も前からはっきりと述べられており，例えば 1959 年にポーランドで開かれた無限的手法の国際会議［8］でも私が提言している．ソロモン=フィファーマン (Solomon Feferman)［4］や一部のロジシャンがこの方面の研究をしているが，まだうまい解決は知られていない．スモリンスキー氏は，これを単に自己参照の問題と呼び，組合せ論理や λ 計算を持ち出し，論点をはずしてしまっている．ここでそれらは役に立たないし，状況はむしろこうである．カルテシアン閉圏は型付き λ 計算の意味を明確にし，さらに型なしの λ 計算が何かを解明するにも役立った．つまり，それは，すべてが関数で，関数はすべてに適用できるというネバー・ネバーランドの別の住人であった (普通の数学の関数ではこんなことは起きない．λ 計算が発見されてから，デイナ=スコット (Dana S. Scott)［11］らが型なし計算のモデルをつくり出すまでに 39 年かかっている．39 年間の意味のない操作を考えてほしい).

2. 強制法　1970 年頃，ローベアとティアニー (Myles Tierney) は驚くべき発見［12］をした．ポール=コーエンが連続体仮説の独立性を示すために用いた「強制法」による証明が，幾何の層化 (sheafification) の操作の言葉で概念化でき，理解しやすくなるというものだ．この啓蒙的な発見は，ロジシャンによる沈黙と侮蔑によって迎えられた．彼らは，強制法のさらなる応用をつくり続け，そのなかには群に関するホワイトヘッドの予想の場合のようにとても有益なものもあるが，華やかな技能を下手な書き方で精巧に展示するだけのものもある．強制法と層化の関連を無視することは，頑迷な細分化の影響を示す顕著な例である．

3. 別の基礎づけ　集合論だけが数学の可能な基礎ではない．スモリンスキーが，その博識にもかかわらず，基礎の根本概念を集合の要素関係から関数の合成に置き換えるというローベアのアイデアを無視しているように見えるのは驚いたことだ．これは，初等トポス理論 (Johnstone［6］) において，今日明示的に提供されるようになったアイデアである．基礎へのこの取り組み方は，実際の数学に近いという利点を持っている．このことは，基礎論は，無矛盾性とか証明論的な強さに限定されるものではなく，集合論的な翻訳ではうまく反映できないような数学の概念構造の分析も包含するものだという考えを強調している．

4. 弱い集合論　そう，たしかに弱い集合論の研究はすでにあった．しかし，私の知るかぎり，そのほとんどが (許容的集合についてのバーワイズの仕事 [1] のように) 技術的な (モデル論の) 問題にだけ関心をもち，数学の実際に対する弱い集合論の適合性についてはほとんどまったく言及していない．例えば，普通の数学において，量化記号 $\forall x$ (すべての x について) と $\exists x$ (ある x が存在して) は，x があらかじめ指定された集合 X (すべての実数とか，与えられたヒルベルト空間のすべての点) の上を動く場合にしか用いられない．言い換えると，量化記号はいつも $\forall x \in X$ や $\exists x \in X$ のように限定されている．内包公理や置換公理が限定量化記号をもつ論理式だけに制限された場合，集合論の強さはどうなるのだろうか？ この点についてのロジシャンへの質問には，まだ答えが出されていない．

5. ZFC　いまや (何年も経て)，スモリンスキーは，ツェルメロ・フレンケルの集合論 (選択公理を加えた ZFC) がとてつもなく強い理論であり，実際の数学のほとんどはもっとずっと弱い理論で扱えることを認めた．この観察結果は，ずっと秘密にされてきたものである．事実上すべての集合論の標準的教科書は，ZFC のみを扱い，あるいはせいぜい本質的に同値なゲーデル・ベルナイスの公理 (まれに，もっと強いモースの理論) を提示するくらいである．これは，ZFC こそが，数学の基礎であるという強い印象を与えている．ZFC の強大な力は，あらゆる順序数と基数を扱うためだけに用いられ，他の話題にはほとんど必要ない．私自身，公理的集合論の講義を何度も教え，ロジックの分野で 3 人の博士論文を指導したことがあるのに，この強大な力の秘密を長年分からなかった．適度な技術と同じく，適度な強さの基礎を望むべきだろう．

要約すると，多くのロジシャンは，自分の関心事に没頭していて，上に述べた 5 項目 (巨大圏，強制法，別の基礎，弱い集合論，ZFC の過剰な力) のような問題がどうなっているか，他分野の人と話し合う気持ちを持っていなかったということだ．

専門化がもたらす偏狭さの例を挙げたことで，私は専門化への反対意見をより慎重に述べることができるようになった．そう，効果的な研究において専門化は必要である．しかし，専門家が自分の隣の分野でまさに生じている

問題を見ることができない場合には不幸な結果を生じる．隣の問題を無視している例として，上ではロジックを取り上げたが，他の分野も似たような近視眼を持っていることは明らかである．

私の前回の論文では，いくつかの論点があいまいだったかもしれない．スモリンスキーは最後に,「数学には統一が必要である」というのが私の信条であると思っているようだ．この後，私は本［9］を書いて，我々に必要なのは統一というより結合であるという意見を主張した．私の本では，数学の多様な結合の様子を図に示している．しかし，(数学の内部や外の科学との) 結合が決して唯一の基準ではない．その他については,［9］の議論を参考にしてほしい．

専門化こそが私の関心事であり，ロジックは他のどの数学分野よりも長く孤立してきたので，そのケースが関連しているのだ．過剰な専門化に対する治療法について私がほとんど語っていないというスモリンスキーの指摘は正しい．彼は，アメリカにおける数学の頑迷な専門化の悪いところは，すべて1960 年代におけるお金の無駄使いに起因していると，あまり考えずに述べている．現在は (国家科学基金 NSF の気まぐれにより) なくなってしまった夏季給与が，1960 年代には年俸の 9 分の 2 支払われていたのは確かである．しかし，私には,「悪いところ, すべて」に対するもっと深い原因が少なくとも3 つ考えられる．

a) 時代遅れの大学院コース　これが，若い数学者のスタートの足かせになっている．もうあまり悪口を叩かないように，具体例を上げることは避けて，ずっと昔の話をしておく．1936 年，不況の真っ只中，私はとても幸運なことに，当時の代数幾何の中心地コーネル大学で教師の仕事を得た．その頃コーネルの大学院生は，射影幾何の 2 つの講義 (解析的なものと総合的なもの) 履修を義務づけられていた．さらに，代数の講義では，ボッシャー (Maxime Bôcher) の良くできてはいるが古くさい (1907) 教科書［2］が使われていた．代数と代数幾何に大変革を起こす目的で書かれたファン=デル=ヴェルデン (van der Waerden) の『現代代数学』がすでに 5 年前に出版されていたのにである．あなたの大学では，このような時代遅れの必須要件を課していないだろうか？

b) 流行　今日の数学の急速な発展は，最近成功した方向に追従することに重

きをおくという結果になった．主要な数学教室では，有力な長老メンバーの指導によって，2，3あるいは4つの専門領域が急に始動する．こうして，研究者の道の入り口にいる大学院初年級の学生はそのような専門領域を選び，それ以外をほとんど無視してそれを追求するようになる．そして，この分野は掘り尽くされ，調べ尽くされて，ほとんど枯渇した先端知識だけを持った学生が残ることがよくある．一例は，ホモロジー代数である．その開発後，1955年から1965年の間に，環論に広く応用された．いまは，巡回ホモロジーなどの新しい突進を除けば，発展は停滞している．ホモロジー代数が多くの応用をもち，有益なアイデアの集まりであることは変わらないが，もはやそれ自身は活発に研究される分野ではない．

c) 経歴書主義の横行　引用索引使用，いわゆる査読付き論文誌への掲載論文の長いリスト，10分の短い講演まで並べ上げた(自慢書ともいうべき)業績書，そして推薦書の使用過多．若い候補者に推薦書は必要だろうけど，同じ推薦書を100通も送るのはいかがなものか．私の大学の最近の昇任のケースでは，候補者1人に12通の推薦書があった．こんなことをする意味が本当に分からない．候補者について考査している教室のメンバーは，候補者の論文を読む時間がなく，その代わりに推薦書を読んで，悩める推薦者が挿入した表現のニュアンスについて論議する．まったくばかばかしい．

最近，カリフォルニア大学の分校の1つが，(彼らの俸給基準外にある)X氏の昇給を検討しているので私にX氏の資格について一筆書いてほしいと手紙を寄こした．私は返事の代わりに，このやり方がばからしいこと，そしてともかくX氏については私よりそちらの方が長くよく知っているはずであることを考えてほしいと総長に手紙を送った．すると，総長は，彼にはこのやり方を改善するすべがないという丁寧な返事をくれた．総長でも，官僚主義に抵抗することができないのか．

この次は，前金で100ドルを要求しよう．

さあ，団結する数学よ，立ち上がれ！学部長と官僚主義を打倒せよ！活気のある大学院コースよ，立ち上がれ！過剰な業績書主義を打倒せよ！隣の分野の新しいアイデアに気をつけろ！

● 参考文献 ●

[1] Jon Barwise , *Admissible Sets and Semantics: An Approach to Definability Theory*, New York: Springer-Verlag (1975). 394 pp.

[2] Maxine Bôcher , *Introduction to Higher Algebra*, New York: The Macmillan Co. (1907, 1930), 321 pp.

[3] Edward E. David , Renewing U.S. mathematics—critical resources for the future, report of the NRC ad hoc committee on resources for the mathematical sciences. *Notices, AMS* **31** (1984), 435–466.

[4] Solomon Feferman , Categorical foundations and foundations of category theory, *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*, Hingman, MA: D. Reidel Publ. Co. (1977), 149–165.

[5] L. A. Harrington , Michael D. Morley , Andrej Scedrov , and Stephen G. Simpson , (eds), *Harvey Friedman's Research in the Foundations of Mathematics.* Amsterdam, New York, Oxford: North Holland (1985), 408 pp.

[6] Peter Johnstone , Topos theory, *London Mathematical Society Monographs* **10**. London, New York: Academic Press (1977), 367 pp.

[7] Saunders MacLane , The health of mathematics, *Mathematical Intelligencer* **5** (1983), 53–55.

[8] —, Locally small categories and the foundations of set theory. *Infinitistic Methods, Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959*, Oxford: Pergamon Press, (1961), 25–43.

[9] —, Mathematics, Form and Function, New York: Springer-Verlag (1986), 476 pp.

[10] Emil L. Post , Polyadic groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 48 (1940), 208–350.

[11] Dana Scott , Continuous Lattices, *Toposes, Algebraic Geometry and Logic. Lecture Notes in Mathematics* **274**, New York: Springer-Verlag (1971), 97–136.

[12] Myles Tierney , Sheaf theory and the continuum hypotheses. *Toposes, Algebraic Geometry and Logic. Lecture Notes in Mathematics* **274**, New York: Springer-Verlag (1971), 13–42.

第II部

カエルとネズミの再会

構成的解析と超準解析

書評

イアン=スチュアート (Ian Stewart)

エレット=ビショップ, ダグラス=ブリッジス著,『構成的解析』(シュプリンガー 1985).
A. E. ハード, P. A. レーブ著,『超準実解析入門』(アカデミック・プレス 1985).[1]

1920 年代，ヒルベルト (D. Hilbert) とブラウエル (Luitzen Egbertus Jan Brouwer) が直観主義を巡って争っているとき，それを評してアルバート=アインシュタイン (A. Einstein) は「この数学者同士のカエルとネズミの戦いは何なんだ」と言ったとか．

そしていま，ヒルベルトとブラウエルの間ほど派手ではないにしろ，我々の間にもカエルとネズミの戦いがある．私は，アメリカ数学会が故エレット=ビショップにジェローム=キースラー (H. Jerome Keisler) の『初等微積分』の書評を依頼して以来，この話題について何か書いてみたいと思っていた．あの依頼はマーガレット=サッチャーに『資本論』の書評を頼むようなものだ．ともかく，かつての私の英語教師の教え「比較し，対照せよ」に従って,「構成的解析と超準解析」を比較対照してみよう．

両派ともに，目的は古典的な ε-δ 式の解析を根本的に異なる視点から再構築することである．どちらも数学の単なる一分野ではなく,「数学はどうあるべきか」という，なかば 1 つのイデオロギーである．

そもそも両者の名前自体が雰囲気を決めている．誰が「建設的 (構成的)」であることに反対できようか？ これは堅実で安心感のある地道なものである．一方,「非標準的 (超準)」には異端，偶像破壊，危険という響きがある．構成主義者は数学を実用的で現実的な，意味のあるものに保とうとする．彼らは

[1] Errett Bishop, Douglas Bridges, *Constructive Analysis*, Springer, 1985.
A. E. Hurd, P. A. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, 1985.

「数値的内容のない」結果を拒絶する．一方，超準主義者は逆の極端に走り，無限小のような理想的対象を散りばめた議論をする．これらの理想的対象を正当化するのは超フィルタ定理である．この定理は存在定理であり，構成的に明示することができず，集合論の標準的な公理系から独立である (選択公理より少し弱い)．状況は典型的な保守派対急進派，現実主義者対理想主義者の戦いに見える．しかし，外見は当てにならない．

● 演説からの引用を少々 ●

> 我々の動機は，ブラウエル (その他) によって詳細に暴露された，古典的数学は数値的意味に欠陥がある，という有名なスキャンダルである．
>
> エレット=ビショップ

> 数学は集合のゲームになった．それ自体は実に精密なルールを持った立派なゲームである．しかし，ゲーム自体がその正当化の理由になり，高度に理想化された数学的存在を表しているという事実が一般に無視されている．
>
> ダグラス=ブリッジス

> 超準解析と呼ばれるロビンソン (A. Robinson) の発明は，無限小の手法を正当化するだけではない．数学研究のための強力な新しい道具である．
>
> A. E. ハード, P. A. レーブ

> その名に値する無限小解析は常に数学者の夢だった．このような夢は認識論的な研究に値するかもしれない．
>
> ジョージ=レーブ (Georges Reeb)

● 構成的解析 ●

まず，2つの理論を概観しよう．構成的解析 (以後 CA) から始め，書評している本に基づいて述べていく．任意の有界列には最小上界が存在する，という標準的な古典的結果を考えよう．この定理の「実際に計算できる」バージョンは実に強力な結果になるだろう．例えば，次の列を考えよう：

$$f_n = \begin{cases} 0 & (n \leq 2 \text{ またはフェルマーの最終定理}^2\text{が真のとき}) \\ 1 & (\text{フェルマーの最終定理が偽のとき}) \end{cases}$$

このとき，(f_n) の最小上界を知ることは，フェルマーの最終定理を証明または反証することに等しい．実際，数学のどんな問題も適当な数列の上限を計算することによって解くことができる．ただし，数列自体は計算可能でも，その上限は計算可能とは限らない (さもないと，チューリングマシンの停止問題が解けてしまう——練習問題).

この問題へのビショップの答えは，数学の対象を構成可能なものに制限することである．これは彼が最初ではなく，例えば再帰的関数 (帰納的関数) の理論は同様な基礎を持ち，ビショップもすべての関数についてアルゴリズム的に計算できることを要求する．しかし，彼は異なる出発点を選ぶ．CA の基礎は実数の定義である．有理数列 (x_n) が正規である，ということの定義を

$$|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1}$$

であることとし，実数とは正規列のことである，と定義しよう．2 つの実数は

$$|x_m - y_m| \leq 2m^{-1}$$

のとき等しい．

別の言い方をすると，実数は特定の収束速度を持った有理数のコーシー列で表現される．収束，数列，sup, inf, lim sup など，解析の基礎概念も同様に再定義される．ただし，関数の連続性では δ に対する構成的な限界 $\omega(\varepsilon)$ (「連続率」) を指定する必要がある．以下同様に理論の再構築を進めていく．

驚くことに，この枠組みの中で解析のほとんどすべてを構成的に展開できる．さらに，どんな古典的存在定理の構成的バージョンも，ある意味でもとの定理よりも強い．ただし，仮定も強いが．ビショップとブリッジスの本は，解析のほとんどすべてが構成化の過程で生き残ると完全に確信できるほど十分に解析を展開している．例えば，彼らは距離空間，複素解析，積分，関数解析などを調べている．たいしたものだ．

ただし，油断していると落とし穴がある．2 つの実数 $x \leq y$ が与えられた

---

2 [訳注] フェルマーの最終定理はこの書評の執筆時点ではまだ証明されていなかった．

とき，$x < y$ か $x = y$ のどちらか確かめられない．集合

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \quad \text{または} \quad x \geq 0\}$$

は $\mathbb{R}$ 全体ではない．$\{0, 1\}$ に値をとり,「常に 0」ではない列 (x_n) は，どこかの n で値 1 をとるということが証明できない．この本の 62〜63 ページには，このような病理的現象がたくさん載っている．これは毛色の変わった数学として注目を集めるためではなく，危険を指摘するためである．

● 超準解析 ●

超準解析 (NSA) の出発点も，新しい実数の概念である．というか，実数の概念を拡張して無限大や無限小を含めることである．その結果得られるのが超実数体 $\mathcal{R}$ である．これは実数体 $\mathbb{R}$ を真部分集合として含む順序体である．超実数体の構成は非明示的であり，自由超フィルタによる．この超フィルタの存在は選択公理の結果である．基本的なアイデアは，エイブラハム=ロビンソンの美しい発見であるところの，超実数体は $\mathbb{R}$ の性質をほとんどみたす，という事実である．これは次の移行原理として崇められる：もし，$\mathbb{R}$ の言語の中で単純な文が真であれば，その $\mathcal{R}$ への自然な拡張も真である (単純な文とは本質的に変数間の関係またはそのような関係の間の恒真な帰結のことである).「$\mathbb{R}$ は完備である」という文は単純な文として構成できない．というのは，もしそれが超実数体内で恒真であると $\mathcal{R} \cong \mathbb{R}$ が導かれてしまうからである．仮定と結論が実数に関する言明であるような定理が与えられたとき，我々はその仮定を超実数バージョンに変換し，対応する結論を超準的方法で証明し，それを実数に戻すことができる．

基本的な定義は明らかに単純になる．例えば，列 (s_n) が L に収束するのはすべての無限大 n に対して $s_n - L$ が無限小になるときである．列 (s_n) がコーシーであるのは，すべての無限大 m, n に対して $s_n - s_m$ が無限小になるときである．関数が連続であるのは，ε が無限小ならば $f(x + \varepsilon) - f(x)$ も無限小となるときである．以下同様に続く．

ハードとレーブは，実解析の超準バージョンをリーマン積分，位相・関数解析，積分論にいたるまで展開し，さらに確率過程の議論にまで達すること

により，この方法の威力を示した．これも感動的であるが，最近出た何冊かの本が示しているように，氷山の一角にすぎない．

● 比較と対照 ●

私の見解では，数学的アイデアを判断する方法は「そのアイデアは数学にどう貢献するか？」と問うことである．

まず，技法から始めよう．私はしばらくの間，2 冊の本に共通な定理を探してみたが，驚いたことに 2 冊の本には共通部分が非常に少ない．「距離空間がコンパクトであることと完備かつ全有界であることは同等である」という定理に出会ったときは掘り出し物に出会ったかと思ったが，実は CA ではコンパクト空間の定義が完備全有界な空間であった (ちょっとずるいんじゃない？と思う)．結局，私は次のお定まりの定理を選ぶことになった：「コーシー列は収束する.」

CA における証明は次のように進む．まず，収束を定義しなければならない．実数の列 (x_n) が x_0 に収束するとは，各 $k \in \mathbb{Z}^+$ に対して，ある $N_k \in \mathbb{Z}^+$ が (構成的に！) 存在して

$$|x_n - x_0| < k^{-1} \quad \text{ここで } n \geq N_k \tag{*}$$

となることである．

列 (x_n) がコーシーであるとは，各 $k \in \mathbb{Z}^+$ に対して，ある $M_k \in \mathbb{Z}^+$ が存在して

$$|x_n - x_m| \leq k^{-1} \qquad (m, n \geq M_k) \tag{*}$$

となることである．

証明：(*) のように (M_k) を選び，$N_k = \max\{3k, M_{2k}\}$ とする．このとき $|x_m - x_n| \leq (2k)^{-1}$ $(n, m \geq N_k)$.

y_k を x_{N_k} の $2k$ 番目の有理数近似とする．$m \geq n$ に対し，

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &\leq |y_m - x_{N_m}| + |x_{N_m} - x_{N_n}| + |x_{N_n} - y_n| \\ &\leq (2m)^{-1} + (2m)^{-1} + (2n)^{-1} + (2n)^{-1} = m^{-1} + n^{-1}. \end{aligned}$$

したがって，$y = (y_n)$ は実数である．$(x_n) \to y$ を見るために，$n \geq N_k$ に対

し，次のように計算する：

$$\begin{aligned} |y-x_n| &\le |y-y_n|+|y_n-x_{N_n}|+|x_{N_n}-x_n| \\ &\le n^{-1}+(2n)^{-1}+(2k)^{-1} \le (3k)^{-1}+(6k)^{-1}+(2k)^{-1} \\ &= k^{-1}. \end{aligned}$$

証明終.

では次に NSA バージョンを見よう (定義は上記のとおり．多少表記法を変えた)．もう 1 つ定義が必要である．$x \sim y$ とは，$x-y$ が無限小のこととする．標準部分 $st(x)$ は，もし存在するなら，$y \sim x$ となる一意的な実数 y と定義する．実はこの存在が証明でき，次のように使われる．

もし，(x_n) がコーシー列なら，(x_n) は有界だから，x_n はすべての無限大 n に対して有限である．ω をある無限自然数とし，$L = st(x_\omega)$ と定義しよう．このとき，すべての無限大 n について $x_n \sim x_\omega \sim L$ だから，$x_n \to L$．証明終.

● 所見 ●

CA は明示的イプシロン式評価を哲学的必然にまで高めたものである．δ の存在を示すだけでなく，δ の見つけ方まで明確に示さなければならない．技法的には何も得るところがなく，単に完全に古典的な種類の細かい近似評価が強調されるだけのように見える．

NSA はオイラー (Leonhard Euler) の夢の実現である．そこでは，無限大や無限小をふんだんに使い，詳細な評価は無視して,「高位の無限小」を心置きなく捨てることができる．そして，こまごまとした辻褄合わせは構造に任せることができる．これで (最大) 約 400%の効率向上になる．

もし，これがアイススケートで私が審判なら，CA には 3.2 点，NSA には 5.8 点の技術点をつけるだろう (アイススケートでは 6 点が最高)．もちろん，「技術点」は基本的に容易なことについて大騒ぎしているだけだ，と感じる人もいるかもしれないが.

次に結果について．我々の努力に対してどんな新しい定理が得られるのか.

ある意味で，CA の定理はすべて新しい．なぜなら，どの定理も古典的な実

数の概念を使わないからである．ある定理の構成的バージョンは一般化でもなければ特別な場合でもなく，類似である．しかし，この「類似」の定理がよい結果をもたらすこともある．例えば，聞くところによれば，ブラウエルの不動点定理(この書評の対象となった本には出ていない)の構成的バージョンは，不動点の位置が分かるので，はっきりと新しい．想像だが，CA は数値解析やコンピュータ科学に用途があるかもしれない．時がたてば分かることだが，私の印象ではまだあまり目立った動きはない．

NSA はどうだろう？ メタ定理：NSA によっては，$\mathbb{R}$ に関する新しい定理を証明することができない．超準解析を使って証明可能な定理はすべて標準的な証明を持つ(これは超準解析のモデル理論的基礎から言える)．では，超準解析は無用なのか？ いや，そうではない．ニュートン (Isaac Newton) の『プリンキピア (Principia)』は，微積分で証明できることはすべて古典的ユークリッド幾何学で証明できる，ということを示すすばらしい例である．だからといって，微積分が無用だと思う人はいない．その理由は，いったん微積分の道具立てが整えば微積分の証明の方が単純で直接的だからである．超準解析についても同じことで，いったん道具立てが整えば証明は簡単になるのが普通である．超準解析を使うことによって「いままで知られていなかった」という意味での「新しい」定理が発見されている．標準的な証明の存在は，その定理が何であるかさえ知られていないうちは，実際的な意味を持たない．

最も明らかな例は，微分方程式におけるカモ (canard) の発生である．これは，あまりに速く起きるために実際的な目的にとっては不連続に等しい，微妙な分岐のようなものである．いまとなってみれば，摂動理論を使ってカモを見つけることは可能に思えるが，実際には NSA によって見つかった後でようやく発見された．もちろん NSA は，後知恵により結果を盗まれる，という可能性を自ら保証しているわけだが．したがって私は，新しい発見には感心するが，いったん成り立つと分かった後で他の方法で得られるという事実には驚かない．

NSA は摂動理論家の夢の実現であってしかるべきである．いまや δx は本当に無限小なのだから．しかし，実際にはほとんど革命の気配すらなく，今後も革命は起きそうにない．ずさん数学の御用商人たちは，彼らの計算を厳格にするような小賢しい手法など欲しくない．彼らはずさんなままでいたい

のだ．私とて彼らに厳格たれと言う気などさらさらない．しかし，多くの人々が NSA を使って摂動問題に関する興味深い新しい結果を得ている．だから競争相手から目を離さない方がいいよ，万が一のためにね，と忠告しておこう．

NSA が大きな影響を与えるかもしれないもう 1 つの分野は確率過程と確率微分方程式である．基本的に，1 点に無限小ランダム運動を無限小区間として与えたい．古典的な解析ではこのようなことができないので，確率微積分に大量の技術的準備が必要で，軌道自体ではなく可能な軌道のすべてからなる空間を扱う必要がある．NSA ではそれができ，驚くほどうまくいく．

結論：何を目指すかはさまざまであるが，芸術点では NSA が 5.5 点程度，CA が 4.3 点近くを得る．ここでちょっと一般原則から離れて，主題についてではなく文体その他について考えてみたい．スタイル点である．

ビショップとブリッジスは，明確さと正確さのお手本である．彼らの文章は文法的に正しく，素材の配列もよく考えられている．批判すべきことは何も見つからない．彼らの本は非常によく書けている．

同じことをハードとレーブにも言えたらよかったのだが．好例は超実数の構成 (この本全体にとって決定的に重要なところ) に関する彼らの議論である．2 ページから 7 ページにかけて，次のような様々なバージョンの実数が登場する：R, $\mathbf{R}$, $\mathscr{R}$, $\boldsymbol{R}$, ${}_R$, $(R)_*$ (奇妙なことに $\mathbb{R}$ は現れない)．これらはすべて異なるものであり，私はほとんどどれがどれだか覚えていられなかった．$(R)_*$ は，$r \in R$ となる要素 $^*r$ 全体の集合である．これをどうして $^*R$ と呼ばないのか，まったく不可解だ．もっとも，9 ページで他のものが $^*R$ と呼ばれていることに何か手掛かりがあるのかも知れない．

彼らの文法もあまり褒められたものではない．ざっと見たところでも，例えば 195 ページの下の方に “In this section we will present several convergence theorems which complement those which have been presented in §IV.2.” とあるが，2 番目の “which” は制限節なのだから “that” にすべきである．それはともかく，全体を次のようにすればもっとずっと簡潔になる：“In this section we present several convergence theorems complementing those presented in §VI.2.” これで約 30%の短縮だ．この率でいけば，この本全体を 70 ページ短くできる．まあ，それほどの短縮は過大な望みかもしれないが，この本はぎこちない文だらけで，要点に達するのが遅すぎる．アカデミック・プレス社

のコピーエディタは青鉛筆を持っていないのか？ それとも，アカデミック・プレス社にはコピーエディタがいないのか？

スタイル点：ビショップとブリッジスに 5.6，ハードとレーブは 3.5.

次に，一般論に戻り，展望について．私は NSA が解析に何か根本的に新しい展望を与えるとは思わない．古いものを立派にするだけである．一方，CA は大きな哲学的出発点であり，称賛に値する特徴を数多く持っている．構成的結果は単なる存在にまさる利点を持ちうる．(得点：CA 5.5，NSA 4.9．)

● 一方で…

何年か前，私はリー代数内のコンピュータ計算に関する論文を書いた．アイデアとしては，基礎体内の計算は正確に行えると仮定し，代数をその構造定数で定義し，可解根基やベキ零根基などの基本的な事柄の計算を試みる，というものであった．最もやっかいなものの 1 つはカルタン部分代数であった．これを行う自然な (そして完全に実用的な) 方法は，要素を 1 つ「ランダムに」選び，そのフィティング零成分を見つけることである．ほとんどすべての場合，これでうまくいく．しかし，もちろんこの方法はアルゴリズム的ではない (実用的ではあるが)．私は何とかアルゴリズムを探し出した．そのアルゴリズムが終了すること (つまり本当にアルゴリズムであること) の証明には，カルタン部分代数は存在する，という古典的な定理を本質的に使った．この定理は (当然ながら) 純粋な存在定理であり，構成的な内容はない．しかし，どんなに頑張っても，これなしに私のアルゴリズムがうまくいくことの証明はできなかった．もちろん私が愚かだったのだが，それが現実である．何かを計算しようとしているときは，あらかじめその存在が分かっていると大いに助かることが多い．

そんなわけで，CA のお膳立ては本当に正しいのだろうか，と思う．それに，コンピュータ科学者たちが群れをなしてこの主題を採り上げている様子もない．計算の効率には共通の関心があるはずなのに．

● 我が無知ぞろぞろ ●

さらに，CA の内部的特徴にも私を悩ませるものがある．私の無知をさらそう．

動機となったあの例，sup (上限) と FLT (フェルマーの最終定理) の例に戻ろう．この例の意図は，古典的解析に数値的意味が欠けていることを示すことである．しかし，私はインチキだと思う．列 (f_n) が何か変でも，解析には関係ないではないか．集合

$$F = \{f_n\}$$

を考えてみよう．$F = \{0\}$ かつ FLT が真，または，$F = \{0, 1\}$ かつ FLT が偽，である．問題は，どちらなのか分からないことである．もし，sup を計算する構成的な方法があれば，もちろんどちらなのか決定できる．第 1 の場合なら sup は 0，第 2 の場合なら 1 である．しかし，私はこの知識の欠如を解析のせいにするのはやりすぎだと思う．怪しいのは集合 F である．説明しよう．仮に，有限基数の構成的理論があったとする．すると，FLT は $|F| = 1$ と同等である．では，数の勘定は「数値的意味に欠ける」というのか？

私には古典的な sup の概念は十分に構成的であると思える．区間を半分にしていけば突き止められる．ただし，与えられた M と X に対して「$x > M$ となる $x \in X$ が存在するか」という問いに答えられることが条件であるが．もちろん，それはいつも構成的にできるとは限らない ($X = F, M = 1/2$ とせよ)．言い換えれば，困難の源は解析が非構成的なことではなく，それらの集合が非構成的なことである．解析の道具立てという膨大なものを導入する前に，その小さな問題に取り組むほうが良いのではなかろうか？ 構成主義者は間違った木の上に向かって吠えているのではないか？ 私にはそんな気がする．

もちろんこの見方には論争の余地がある (哲学は常にそうである)．しかし，なぜこのような例から解析を再構築しようという衝動が生まれるのか，私には本当に分からない．多分，この衝動の方が先にあって，例はそれを正当化するためのものだろう．CA は哲学的な頭痛の種を抱えている．CA の目的はこの頭痛の種を数学全体に押しつけることだ．

● 結論 ●

私は最初，CA を保守派，現実主義者に，NSA を急進派，理想主義者にたとえた．だが，違う，そうではない．構成主義者は哲学的急進派である．彼らは数学全体に革命を望んでいる．彼らは理想主義者である．その動機は説得力のある確固たる証拠からではなく，彼ら自身の哲学的衝動である．一方，超準主義者たちは，何世紀も昔に受け入れられた概念を再導入しようとしているだけである．彼らは超保守的である．そして,「現実世界の」(非線形確率解析の) 問題への応用で判断するかぎり，超準主義者たちの方が実用性の主張に妥当性がある．CA の哲学は実用性を主張できるかもしれないが，いまのところ実用レベルの成果はまったくない．

だが，これでもまだ本当の姿ではない．両者ともにステレオタイプにはまらないのはあっぱれである．超準主義者は自由への突破口を任じ，大胆不敵にも ε-δ の首輪を投げ捨てようとしている．構成主義者はその首輪を我々の首に永遠に固定しようとしている．構成主義者は自由が腐敗するという確たる証拠もないのに，そうなるはずだと骨の髄から信じている．そして，我々に自由を捨てろと要求する．あなた方のためなのだ，と．私たちの方がよく分かっているんですよ，と．

なんてこった．結局，彼らは保守主義者なのだ．

カエルの返答

フレッド=リッチマン (Fred Richman)

私は構成数学者として「自由の敵」だの「真の信者」だの「数学者たちを原罪から救いたがっている」だのと言われるのには少々うんざりしているが，それでも通常経験する反応である虚ろな表情や哀れむような微笑みよりはましである．そういう意味で，ビショップとブリッジスの著書『構成的解析』に対するイアン=スチュアートの書評 (マセマティカル・インテリジェンサー, Vol.8, No.4) は多少嬉しい気もする．が，いくつか反論したい点もある．「カエルとネズミの再会」と題されたこの書評では，構成数学者は急進右派にたとえられている．慈悲深い評者は我々をファシストと呼ぶことは思い止まった．私は彼のあまり個人的でない意見についてだけコメントすることにしよう．

スチュアートの誤解の 1 つは「定理の構成的バージョンは一般化でも特別な場合でもない」というものである．構成的定理は一般化であり，多くの場合，古典的な定理より証明が難しい．古典的に証明可能な言明に構成的な証明がないこともある．一方，構成的な証明は同じ言明の古典的証明でもある．これは構成数学と再帰的関数論 (帰納的関数論) の間の大きな違いの 1 つである．再帰的実数に関する定理はただそれだけのものであるが，実数に関する

* フレッド=リッチマンはプリンストン大学で学士号を取得し，アーヴィング=カプランスキー (Irving Kaplansky) の指導の下でシカゴ大学で博士号を取得した．構成数学の他，無限アーベル群の理論にも大きく貢献している．また，ブリッジの終生名人であり，カエルにされた王子様である．

構成的な定理は実数に関する定理である．ビショップの実数の定理についてスチュアートは「構成的解析の基礎」と言っているが，古典的展開の基礎としても使える．任意のコーシー列の代わりに有理数の正規列を使うのは，技術的な利便性のためであり，本質的なことではない．

定理に古典的証明ではなく構成的証明を与えることは，定理を体ではなく環について証明するようなもの，あるいは，ノルム空間ではなく局所凸位相ベクトル空間について証明するようなものである．つまり，仮定が少なくなる．構成数学では排中律を仮定しない．ちょうど，群論で可換律を仮定しないようなものである (もっともラスクルーセス[2]ではどんな群も可換であるが)．また，可換性を仮定するといくつかの定理が同等になる場合があるように，1つの古典的定理が古典的に同等な再構築によって複数の異なる構成的定理になる場合もある．

どうして我々はそれほどまでに古典論理の使用を拒み，排中律を否認することにこだわるのだろうか？ その理由は，古典論理を用いると我々が有意義と考えるいくつかの区別ができなくなるからである．もっとも，古典論理を完全に信じている人にとってはこれらの区別は無意味である．それでも，そのような区別の例として，大ピカールの定理の 2 つのバージョンを紹介しよう．f が級数

$$f(z) = \sum_n a_n z^n$$

として表現され，これが 0 一点を除いた，ある 0 の近傍で収束すると仮定する．このとき，

(i) 各正整数 N に対して $a_n \neq 0$ となる $n < -N$ を見つけられるなら，与えられた異なる複素数 α と β に対して，$f(z) = \alpha$ または $f(z) = \beta$ となるような z を 0 にいくらでも近く見つけることができる．

(ii) 0 に十分近いすべての z に対して $f(z) \neq \alpha$ かつ $f(z) \neq \beta$ となるような異なる複素数 α と β が与えられたとき，すべての $n < -N$ に対して $a_n = 0$ となるような N を見つけることができる．

---

[2] リッチマンが所属していたニューメキシコ州立大学がある市．

(i) と (ii) では与えられるデータと必要な構成が劇的に異なる．しかし，古典論理ではこの 2 つの言明の同等性が簡単に証明できるので，両者の区別は失われる．この区別は保存すべき価値があるだろうか？

スチュアートは構成的な証明と超準解析の証明を比較するために，実数のコーシー列は収束する，という定理を使った．彼はほとんどコメントしていないが，構成的な証明はゴチャゴチャして計算が多く (同じことか？)，超準解析の証明は単純でエレガントに見える．しかし事実は，前者は率直なプレーンバニラ的証明であり，構成数学の枠組み内での証明であることを意識せずとも理解できるが，後者は謎めいた証明であり，相当量の非標準的な (当然!) 予備知識を必要とし，ゴチャゴチャしたメタ数学的な準備が隠されている．

計算理論に非構成的技法を使う例を挙げることでその使用を擁護するつもりなのか，スチュアートはリー代数のカルタン部分代数の計算のために彼が開発したアルゴリズムについて述べている．彼によれば，そのアルゴリズムがうまくいくことを証明するために構成的な定理ではなく古典的な定理を使ったとのことである．私は，彼が実際に何をしたのか，カルタン部分代数が何であるのかも知らないが，いくつか言いたいことがある．

実際問題としてアルゴリズムは，理論的に常に停止するか否かにかかわらず，またその理論が古典的であろうが構成的であろうが，妥当な時間内に停止する必要がある．これがスチュアートに，コンピュータ科学者たちは群れをなして構成数学を採り上げていない，と思わせている理由の 1 つである．もう 1 つの理由は，コンピュータ科学者たちは再帰的関数論が構成数学であると教えられてきたことである．それでも，いまでは多くのコンピュータ科学者たちがビショップの仕事を真剣に採り上げている．

とはいえ，スチュアートはここで本質的な問題を提起している．すなわち，アルゴリズムがうまくいくという非構成的な証明は構成数学の中でどのような位置を占めるか，という問題である．私は，発見を助けるだけの役割だと思う．ほとんどの場合，構成的証明が得られていない唯一の理由は，明快な構成的技法がある場合でさえも非構成的な技法の使用が奨励されてきたことである．構成的証明の方がずっと多くの作業を必要とするということはあまりないが，たとえ必要とする場合でも私は非構成的な証明では気持ちが悪いので頑張って構成的に証明する．それが時として問題に対するより深い洞察

を与えてくれることがある．これは好みの問題でもあるが，数学者は単なる証明では決して満足せず，最も適切な証明を欲しがるものだ．

カルタン部分代数に戻ろう．有限次元結合的代数の根基を計算するという類似の問題では，基礎体で正確な計算ができるというだけでは不十分である(ただし体が完全なら十分である)．誰か構成数学者が有限次元リー代数で何が起きているのか知ろうとすれば，カルタン部分代数の問題は解決できるかもしれない．スチュアートの結果を考慮すると，多分計算可能であることを示せるだろう．スチュアートは構成的証明を探したが見つからなかったとのことなので，状況は可算体上の多変数の多項式環がネーター環であることを示すということに似ているのだろう．有限生成イデアルの鎖の中で 2 つのイデアルが等しくなる場所を見つけるための粗削りな同時数え上げアルゴリズムがある．この環は古典的にネーター環なので，このアルゴリズムの成功は保証されている．構成的に確認可能なアルゴリズムはもっと微妙であり，多分実行が速く (本質的な問題ではない)，関連したレンマはより多くの情報を与えてくれる．

スチュアートは構成数学の典型的な集合の 1 つに触れている．その集合 F は，フェルマーの最終定理が真のとき $\{0\}$ であり，フェルマーの最終定理に反例があれば $\{0, 1\}$ である (後者は x, y, z, n を見つける必要があるので肯定的言明である)．集合 F は実数の有界集合であるが上限の計算方法が分からないので，構成数学者は上限が存在するとは言わない．この集合に関してスチュアートは「上限という古典的概念は構成的だと思う」と述べている (したがって問題は F にあり，上限の概念にはない，と)．彼がどういうつもりなのか，私にはよく分からない．もちろん，上限という概念は古典数学の一部であると同時に構成数学の一部でもある．もしかすると彼は，古典的な意味で上限を持つ集合が構成的な意味で上限を持つとは限らない，という考えに違和感を持っているのかもしれない．彼は，「$x > 1/2$ となる $x \in F$ は存在するか？」という問いに我々が答えられないことを根拠に，F がおかしいのでは？ と示唆し，この問題に取り組むべきであって「解析の道具立てという膨大なものを導入する」のは「間違った木の上に向かって吠えている」ことだ，と主張している．

私は F に対するこの態度を見て，我々の「ふしだらな実数」について不満

を訴えていた学生のことを思い出した．集合 F は，好むと好まざるとにかかわらず，消えてなくなりはしない．たとえ {0, 1} の部分集合について語り始めたときに心の中になかったとしても，なくなることはない．実際，{0} や {0, 1} のような有限集合と F の間に区別をつけ始めた瞬間に，構成数学をしていることになる．問題は，F のような集合を考えることを完全に拒絶して行儀のよい集合だけを考えるのか，ということである．しかし，F は容易に計算可能なある関数の値域なので (スチュアートはそのようなものとして提示しなかったが)，F を無視することはほとんど不可能である．

私に理解できなかったのは，集合 F から勘定が計算的意味に欠けるという結論を導こうというスチュアートの背理法の試みである．有限基数の構成的な理論は十分に単純であり，F が基数 1 を持つという言明には計算的な意味が十分にある．多分彼は，我々が F に有限基数を割り当てられないという事実，つまり，F は有限集合の部分集合なのに有限集合であると言えない，という事実に反発しているのだろう．しかしこれは，有限生成加群の部分加群が有限生成とは限らないことや，可測集合の部分集合が可測とは限らないことに比べ，それほど受け入れ難いことだろうか？

ネズミはいるか？

イアン=スチュアート (Ian Stewart)

イアン=スチュアートの書評へのフレッド=リッチマンの返答へのイアン=スチュアートの応答

私は，この論争における自分の役割はカエルでもネズミでもなく，いわゆる煽動者，すなわち騒乱を起こしたがる悪意ある部外者，と思っている．ネズミからの連絡はないが，私の考えをはっきりさせたい．

以下，A = 解析，C = 構成的，S = 標準，N = 非 とする．

● 一般化か否か ●

SA の定理の CA バージョンは一般化だろうか？ 私は違うと言い，フレッドは私の誤解だと言う．これはまったく定義の問題である．私の理解するところでは，CA の主要な目的は SA の定理を取り上げ「それを構成的にする」ことである．この過程は，標準的な定理 T を選び，それを各用語に暗黙のうちに「構成的」が追加される辞書に通し，構成的類似物 TC を作る．しかし，もともとの証明をこの辞書に通しても TC の証明になるわけではないので，自明でない命題が存在する．フレッドは「構成的証明は同じ定理の古典的証明でもある」と言う．それには同意するが，それが私の言ったことにどう影響するのかが分からない．私が言いたかったのは，SA 内でそのように解釈された TC は T の一般化でも特別な場合でもない，ということである．なぜなら，概して TC は 仮定も結論も T より強いからである．例えば，T =「コーシー列は収束する」としよう．そのとき，TC =「構成的にコーシーな構成的な列は構成的に収束する」となる．これは T の一般化ではない．なぜなら，構成

的にコーシーでないコーシー列が存在するからである．また，特別な場合でもない．なぜなら，収束しても構成的に収束するとは限らないからである．

● フェルマーのうさん臭さ

フェルマー集合 F の問題はそれほど明快ではない．分かりやすく説明しよう．CA の議論では，FLT が証明または反証されないかぎり $\sup F$ が分からないので解析は「数値的意味に欠ける」というわけである．これに異論はない．私が言いたいのは，もっとずっと基本的な問題であり，FLT を証明または反証しないかぎり F の基数すら分からない，ということだ．この事実により，勘定も「計算的意味に欠ける」のだ．

これを不合理とみなすべきかどうか私には分からない．私が言いたいのは，この問題は明らかに集合 F のうさん臭さに関係しているので，解析自体を手直しする気にはなれない，ということである．タンクにガソリンが入っていないため車が動かないのなら，始動モーターを買い換えることはない．

私がいままでに見たことのある CA を正当化する例は，ほとんどすべて同様に的はずれなものであった．例えば，ビショップとブリッジスによる『構成的解析』の p.37 に，「実数の有界集合には上限がある」という言明への反例がある．この例は，$\{x_n\}$ について，$x_n = 0$ または 1 であるが，どちらか分からない，という形をとる．この場合も，責任は sup ではなく集合にある．

私は構成的解析学者が「集合 S は完全に合理的だが，その sup は構成的でない」という例を与えてくれたら，この反対意見を引っ込めよう．

● 絨毯の下のコーシー

私が CA と NSA における「コーシー列は収束する」の証明の比較を故意に粉飾したのではないか，という指摘には同意する．たしかに，NSA の証明には膨大な道具立てが必要なのに，それが隠されている．

しかし，数学者が研究をするとき実際に何をするか，ちょっと考えてみてほしい．彼らはすでに知られている概念や方法の脈絡の中で仕事をする．ハ

ミルトン系に関する定理を証明しようというときに，シンプレクティック形式についてあらためて説明する必要はない．数学の研究者が強力だと思う方法は，一度修得するといままでよく見えなかったものが容易に見えるようになるような方法である．その意味で，NSA の証明は NSA での議論の進め方の典型的な例になっている．証明は短く，心地よく，簡素である．一方，CA の証明は，こちらも CA の典型で，解析のまさにその部分，すなわち，できれば絨毯の下に掃き込んでしまうべき微妙な評価に議論を集中している．概念の力は細部の帳尻合わせを避けることから生まれる．CA はこの帳尻合わせを哲学的な至上命令にまで高め，研究の主目的にしている．

これは，例えば再帰的関数論がコンピュータ科学者の間で広く知られているが CA は広く知られていない，という観察結果に完全に一致していると思う．再帰的関数論は計算可能性や構成可能性という基本的な集合論の問題を扱う．CA はもっとずっと基本的な集合論的問題に接ぎ木した人工的な展開のように見える．私は，CA が数学の主流に何か価値を加えたとは思わない．CA の主な貢献は哲学的な観点である．第 2 節で議論したように，私はこの観点の証拠に不備があると思う．なぜ集合論ではなく解析に訂正が必要なのか，という説明がないからだ．これに対して NSA の方は，いまはまだ流行していないが，複雑な技術的問題の考察を容易にする見込みがある (すでにある程度実現している)．通常はイプシロンのジャングルに埋もれてしまうような様々なレベルの構造を切り開いて行けるからである．

最後の一言．たしかに CA だけを攻撃するのは不公平である．数学には，もっと批判されてもいい研究分野がたくさんある．それらの分野は取り残された水溜まりのように生き残り (予算当局者に善意はあるが分別がなく適切な人々に適切な質問ができないため「資金たっぷりの水溜まり」という場合もある)，目立たないようにして生き延びている．構成的解析は挑発的なので目立ってしまう．これは，構成的解析の推進者たちの押しが強いからというわけではなく，構成的解析が実際に非常に興味深い一般的な問題を提起するからである．構成的解析は，ある種の目的 (例えば解析の対象のアルゴリズム的計算) には，何か伝統的な方法では得られないものを提供してくれるかもしれない．いまのところ重大な結果は得られていないようだが，あり得ないことではない．私の予想では，標準的な解析の中の技法的な発展という程度

にとどまり，数学の大規模な再構築の基礎になることはないだろう．時がたてば分かることだが．

最後のゲコ

フレッド=リッチマン (Fred Richman)

イアン=スチュアートの書評へのフレッド=リッチマンの返答へのイアン=スチュアートの応答へのフレッド=リッチマンの返答

構成数学を理解するには，構成数学を構成的集合，数，列などの研究と見てはいけない．構成数学は，集合，数，列などの構成的研究である．定理を構成的にするのではなく，定理に構成的な証明を与える．定理 T の構成的証明は，SA における T の証明にもなるが，イアンによる TC を SA で解釈したものの証明にはならない (もっとも，これは彼の解釈というものが SA で意味をなすと仮定した場合の話である．そもそも，構成的にコーシーでないコーシー列というものが本当に SA に存在するのだろうか？)．そういうわけで，CA は SA の一般化である．

イアンは集合 F の間違った定義を繰り返しているので，ここではっきりさせておこう．ビショップとブリッジスの本の p.37 の例では，各 n については $x_n = 0$ か $x_n = 1$ か，どちらなのかが分かる．分からないのは，すべての n について $x_n = 0$ となるかどうかである．例えば，$x_n = 1$ となるのは n より小さい正整数 x, y, z, m が存在して $x^{m+2} + y^{m+2} = z^{m+2}$ となるときだけとしよう．この数列の値域は集合 F である．私が指摘したように，F は計算可能な関数の値域である．なぜこれが完全に合理的な集合ではないのだろうか？

構成主義者は，古典数学のうちで解析だけが計算的意味に欠ける，と主張しているわけではない．例えば，完全数によって生成される整数の部分群 P は単一の元によって生成されることになっている．しかし，そのような元を構成する方法は分からない．また，もし「勘定」が「有限集合 (すなわち，ある n について $\{1, 2, \ldots, n\}$ と 1 対 1 対応がつけられる集合) の任意の部分集

合は有限である」という意味をも含むのなら，私は「勘定も計算的意味に欠ける」ことに同意する．もちろん集合論は改訂を必要とするが，集合 F や部分群 P を「非構成的」として除外することによってではない．

我々が帳尻合わせを哲学的至上命令にしているとのことだが，構成的解析にも古典的解析にもゴタゴタした表現はあるし，イプシロンのジャングルは前者に必須の特徴でもない．構成数学は，計算ばかりすることを要求するのではなく，単に必要な計算が原則的に実行可能であることを示すだけである．

最後のチュー

イアン=スチュアート (Ian Stewart)

イアン=スチュアートの書評へのフレッド=リッチマンの返答へのイアン=スチュアートの応答へのフレッド=リッチマンの 返答へのイアン=スチュアートの反論

ビショップとブリッジスの本の p.11 から引用しよう：構成的存在は古典数学の理念的存在よりもずっと限定的である．ある対象の存在を証明する唯一の方法は，その対象を見つける有限な手順を与えることである．

私は SA の立場で非再帰的関数 $f: N \to \{0, 1\}$ を選ぶ．例えば，g をあまりに急激に大きくなるため非再帰的となるような関数とし，g の値域に n が入らないかぎり $f(n) = 0$ とする．そして，小数展開が $0.a_1a_2a_3 \ldots a_n = f(n)$ であるような実数 A を作る．(b_n) をこの有限近似値列 $b_n = 0.a_1a_2a_3 \ldots a_n$ としよう．この列はコーシーであり，A に収束する．

しかし CA では，列 (b_n) は存在すらしない．もちろんコーシーでもない．

私は集合 F の正確な定義を受け入れる．私の定義は単純すぎた．それにしても，その構成方法が「この集合を見つけるにはフェルマーの最終定理を解決する必要がある」に薄化粧をしただけのもの，という集合は何か怪しくないだろうか[1]？

[1] ［訳注］フェルマーの最終定理はこの書評の執筆時点ではまだ証明されていなかった．

第 III 部

数学基礎論の世界

高校で無限小を教えるために——ライプニッツからロビンソンへ

ヴィクター=ハーニック (Victor Harnik)

●ライプニッツの解析学●

微積分学は1670年頃に，ライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz) とニュートンによって独立に発明された．この発明は，その直前からアルキメデス (Archimedes) までたどれるような，多くの人たちの研究に基づいているのだが，ライプニッツとニュートンによる研究こそが，人々に強烈な影響を与えたのであった．いまもなお，ライプニッツによる記法や用語は，広く使われている．ここで，ライプニッツが，研究をどのように進めていったか，簡単に述べることにしよう．

ライプニッツの研究の動機は，関数の「局所的な」つまり「瞬間的な」動きを解析したい，というものであった．すなわち，時間や空間の1点で起こる現象の解析である．この動機から彼は，新しい種類の数を発明したのであった．それは「無限に小さな」数——すなわち，0とは異なる数だが，その絶対値はどんな正の実数よりも小さい数．彼はこのような数のことを，(0でない) 無限小 (infinitesimal) と呼んだ．無限小を使ってライプニッツは，関数 $f(x)$ の導関数を，次のように定義したのだった．

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

* この記事を発表する機会を与えていただいた A. シェニッツァ (A. Shenitzer) 教授に感謝の意を表明する．教授の助言により，非常に勇気づけられたのみならず，最初の原稿に改良を加え，ヨーク大学でタイプすることができた．言うまでもなく，不備が残っている点はすべて私の責任である．この原稿はさらに，ハイファ(イスラエル) 地域の高校教師の集会で発表された．

この式で dx が 0 でない無限小であり，x の非常に小さな変化，すなわち無限小の変化を意味している．(注意：よく Δx と書かれるものと，この dx はまったく別物である．一般に Δx は，x の有限の増分を表すために用いられている．また,「$f'(x)$」という記号はライプニッツのものではなく，後にラグランジュ (Joseph Louis Lagrange) が導入したものである.)

ライプニッツは無限小について，次のような，すばらしい描写を残している．無限小は，普通の (「標準的」な) 正の実数と比べて，無視できる量をもっている．それはちょうど，球技のボールの直径が，地球の直径と比べて無視できるようなものだ．さらに地球の直径は，宇宙の次元で考えれば，無視できる量であることとも同様だ．

さらにライプニッツは，この新しい数である無限小を研究に使うため,「連続性の原理」という一般的ではあるが，それほど明確でない概念を述べている．この原理は,「無限小」は特別に小さな数だが，そのことを除いては**普通の実数とまったく同じように振る舞う**ということを意味している．例えば，いま述べたライプニッツによる無限小の描写も，この原理の例証となっている．つまり，ボールの直径くらいの小さな数は，星の直径くらいの大きな数や，あるいは宇宙の次元の巨大な数と同じ法則に従っている．この連続性の原理は，ばく然と述べられたものだった．しかし大切なのは，ライプニッツがうまく実際問題に応用したことである．

● 無限小がたどった運命

無限小は最初の時点から，人に不安をいだかせるような数だった．ライプニッツ自身は無限小を,「役に立つ想像上の数」と呼んでいたが，一方のニュートンは，無限小をすぐに捨てて，導関数を「瞬間の速度」として定義することを選んだ．この「瞬間の速度」も，明らかなものではない！ これに対して，微積分学の最初の教科書を書いたロピタル (de l'Hôpital) は，熱心に無限小を支持している．彼は本当に，無限小を信じていたのである．同時代の他の人たちは，彼のように熱心ではなかった．実際に，無限小に対するきびしい批判もあった．有名なのはバークレー主教で，1743 年に無限小の批判を，次の

ようにはっきり述べている．

(a) 0でない無限小は存在しない．なぜなら，絶対値がどんな正の実数よりも小さいような数は，0だけだから．

(b) $f(x) = x^2$ とすると $f'(x) = 2x$ であり，一方，

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = 2x + dx$$

である．この2つの式は同じものだから，$2x = 2x + dx$ である．ゆえに，$dx = 0$．これは dx が0でない無限小であることに矛盾する．

無限小は，この批判のような論理的なあいまいさをもつにもかかわらず，実際に使われて成功を収めている．優れた数学者の何人かは，使うだけでなく，論理的な基礎づけの努力も行った．例えば，ラグランジュ，ダランベール (d'Alembert)，ボルツァーノ (Bernard Bolzano)，コーシー (Augustin Louis Cauchy) である．中でも，コーシーについては，複雑でたいへん興味深い話がある．彼は無限小を，0に収束するような変数として考えた．つまり**極限**を基本にすえたものである (注意：コーシーの極限の概念は，現在の ε-δ 論法によるものと同じではない)．コーシーの目的は，無限小の信頼性を高めることだったが，成功はしなかった．実際には，彼の努力は裏目にでたと言える．次のようなエピソードがある．コーシーは1821年に，ある定理を示すため，無限小を使った．これは，連続関数の各点収束する級数は連続になるという意味のものである．多くの人たちが，この定理は間違いであると指摘したが，コーシーはかたくなに主張をまげなかった．この論争は生涯続いた．亡くなる4年前の1853年になっても，定理が正しいことの説明を出版している (アーベル (N. H. Abel) の1826年の反例に対する反論として！)．数学者たちにとって，無限小のイメージを伝えあうことはできないように思われた (興味のある読者は Lakatos［3］，Robinson［4］を参照してほしい．コーシーは間違っていたのか，あるいは誤解されていたのかについての論争がまだ決着していないことが分かる)．

このような成り行きは，驚くことではない．なぜなら，無限小をまったく使わずに極限を定義することは，後の1872年になって，ワイエルシュトラス (Weierstrass) により行われたのだったから．しかし，逆説的だが，コーシー

による極限の表現があったおかげで，いまでは普通に使われているような，ワイエルシュトラスの定義にいたる道が開けた，と言えよう．さて，その後，ワイエルシュトラスは極限の定義を使って，連続性と導関数という重要な概念を定義した．このような進展からは当然だが，無限小は，論理的には受け入れられないものとして，見捨てられていった．

無限小が，次に登場するのは 1960 年であり，ライプニッツが数として導入してから約 300 年たった後である．この年，エイブラハム=ロビンソン (Abraham Robinson) は超準解析学を発表して，無限小の論理的な正当性を示した．ついに無限小を「まともなもの」としてとらえたのである．

● 研究・教育での無限小の使われ方 ●

しかし無限小は，まったく捨てられていたというのではない．今日まで，物理学者や応用数学者は (ロビンソンの現代的研究は知らなくても)，無限小を使ってきている．約 30 年前，多くの学校では工科系の学生に，無限小を使って微積分学を教えていた．いまでも物理学の教授は,「面積要素 dA」や (電気伝導体などの)「線素 $d\ell$」などを使っている．例えば，ランダウ (E. G. H. Landau) の『微積分学』—20 世紀の数学で厳密に書かれた，優れた本だ—のような本の中にも，$\lim_{x=a} f(x)$ という記法が使われていることは，数学者が無意識に，無限小を取り入れていることを表している．この記法は，極限値とは,「x が a に到達した瞬間」に f がとる「最終の値」であるという見方を反映しているのだろう．

無限小について聞いたことすらない数学の教師の世代が育ってきたのはここ最近になってからのことである．大学や，高校でさえも無限小のような「正確でない」概念をとりあげることなど問題外である，という雰囲気がある．ロビンソンの発見によって，無限小を学校に復活させることは，十分期待できる．しかし，ほとんどの数学者は，ロビンソンの成果は洗練されすぎていて初学者教育に向いていない，と考えているのである．

そのようには考えない人の中に，ウィスコンシン大学の優れた数学者 H. J. キースラーがいる．1976 年にキースラーは，無限小解析についての教科書

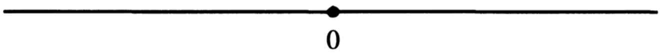


図 1

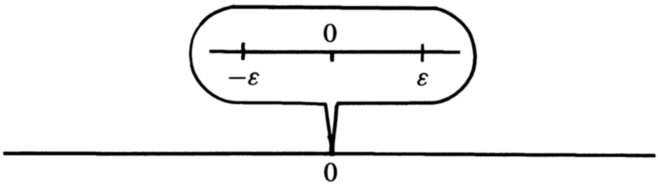


図 2

[1] と，教師用のガイドブック [2] を出版した．そこでは，ロビンソンの発見の重要な部分をどのように要領よく述べるか，微積分学を教えるために，どのように使うかが示されている．この本はいくつかの大学で試用された (サリバンの報告書 [5] を参照)．実は，この私の記事が書けること自体，キースラーの本のおかげである．

● 高校で無限小をどのように使うか

無限小を使って微積分学を教えるのは，高校で微積分学を習う最初の時点からがよい．幸い，キースラーの方法で，非常に直観的なレベルから始めることができる．もちろん実際に行うには，もっと初等的で適切な本を書くことや，教師が知識を得たりすることなど，多くのことが必要である．ここでは，どのように無限小を教え始めるかを，少し述べてみよう．

まず生徒に，数の概念を何度も拡げてきたことを思い出させる．つまり，分数，負の数，無理数というように (無理数については，任意の 2 つの線分の比を測るために必要であることを述べるとよいだろう)．そして新しい種類の数



図 3

の，(0 でない) **無限小**について述べる．すなわち 0 とは異なるが，その絶対値はどんな正の実数よりも小さい数である．単純明快に述べるには，キースラーが工夫した，次のものを示すとよい．数直線の原点 0 に，顕微鏡の焦点を合わせたところを想像してみよう．肉眼では，図 1 のように見えるが，肉眼での**単一の点** 0 は，顕微鏡の視野では 1 点ではなく，まったく違うものとして見えている．顕微鏡ではまん中に「輝く中心」,「本当の」0 があり，その両側に新しい数が，(肉眼では 0 にすべて一致して 1 点として見えるが) すべて異なって見えている (図 2)．この 0 に焦点が合った顕微鏡の視野に見えている数すべてが，無限小である．つまり 0 自身 (「輝く中心」) は無限小であり，その他は 0 でない無限小である．無限小が，ごく小さい数と同じように振る舞うのは，この微視的な図でも分かる．片側は正の数，他方は負の数である．足したり掛けたりでき，どの数も (加法の) 逆元をもつ．だから ε が無限小のとき，$\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$，$\varepsilon^2$，$-\varepsilon$ などは無限小である[1]．0 でない無限小と普通の数とを足してもよい．例えば 2 に対して $2+\varepsilon$ を考える．これは無限小でなく，新しい種類の数である．どこに位置しているのか？ どのように見えるのか？ 答えは簡単だ．すなわち，肉眼では $2+\varepsilon$ は 2 と一致して見えるが，2 に焦点を合わせた顕微鏡の視野では (図 3 のように) 2 とは違って見える．

普通の「巨視的な」数を**標準数 (standard number)** と言う (普通の実数の

[1] 無限小についてのこのような記述は，20 世紀の生徒がよく知っている物理的実在物に基づいているので，たいへん魅力あるものになっている．1 点に見えるものが装置を使うと実はとても複雑な構造を持つことが分かるというアイデアは，今日では驚くべきことではない．また，物理的なもので数学の概念を説明することはよくある．例えば直線は張りつめた糸で，点は砂つぶで説明し，数は実数直線上の点と同一視する．さらに負の数は，高さや温度で説明したりする．

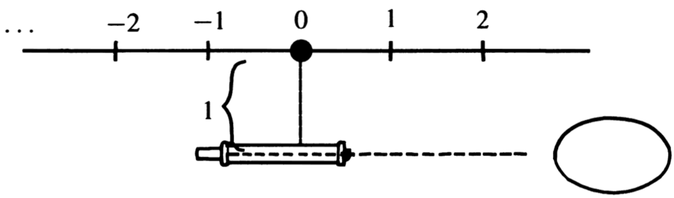


図 4

ことである).「標準実数」とも言う.

任意の標準数 a は，無限個の新しい種類の数に囲まれている．巨視的にはすべて a と一致して見えるが，微視的にはすべて異なっている．

再び，標準数 2 と新しい種類の**超準数** (nonstandard number) と呼ばれる $2+\varepsilon$ を考えてみよう．ε は 0 でない無限小である．明らかに $2+\varepsilon \neq 2$ だが，この式は**微視的**であって，**巨視的**には 2 と $2+\varepsilon$ は等しい．だから，次の 2 種類の等号 (すなわち 2 つの異なる同値関係) をもつことになる．1 つは**微視的な等号** (すなわち無条件の等号) で，普通「$=$」で表される．もう 1 つは**巨視的な等号**で，肉眼で見たときに一致する数で成り立つものである．これはロビンソンの記法で「$\approx$」で表される．したがって，$2+\varepsilon \approx 2$ だが，$2+\varepsilon \neq 2$ である．

いま，$\varepsilon \approx 0$ のとき ε を無限小と言うことにする．この巨視的な等式は微視的な $\varepsilon \neq 0$ とは矛盾しない．0 は唯ひとつの**標準**無限小である．一般に，$a \approx b$ とは $a-b$ が無限小のときとする (このとき a は b に近いと言う)．だから標準数 a, b に対して $a \approx b$ と $a=b$ は同値であるが，任意の a, b に対しては，$a \approx b$ でかつ $a \neq b$ であることが起こりうる．この 2 つの意味の等号を使えば，バークレー主教の批判をかわすことができる．ライプニッツやロピタルは，2 種類の等号の違いを気づいていたのだが，記号として表すことをしなかったのである．

いま，ε が正の無限小のとき，(乗法の) 逆数 $1/\varepsilon$ について述べることができる．これはすべての標準実数よりも大きな正の「数」となる．どのようにすれば見えるだろうか？ もちろん望遠鏡を使って！ まず数直線から 1 単位分だけ離れて，平行においた望遠鏡を想像しよう．このとき望遠鏡の視野は，

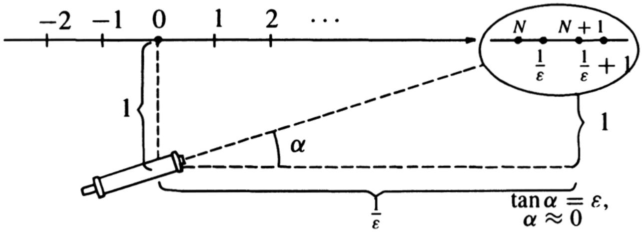


図 5

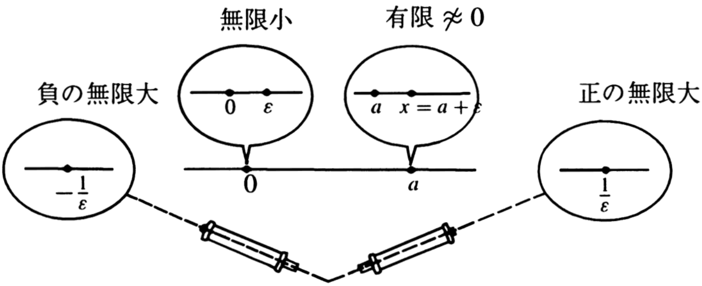


図 6

空のはずである (図 4)．そこで望遠鏡を 0 でない無限小の角度 α だけ上に向けてみよう．望遠鏡と数直線は「巨視的には」まだ平行にみえるが,「微視的には」そうではなく，角度 α を適当にとれば，(図 5 のように) $1/\varepsilon$ を中心にもつ線分を望遠鏡の視野に入れることができる．つまり $\tan\alpha = \varepsilon$ となるように α をとればよい．

この望遠鏡の視野に見えている数は，すべて正で無限大の超準数であるが，それ以外の性質は，普通の線分と同じはずだ．だから $1/\varepsilon$ はある超準的な**無限大整数** N と $N+1$ の間のどこかに位置するはずである ($1/\varepsilon = N$ もありうる).

標準数と超準数とを合わせて**超実数** (hyperreal) と呼ぶ．超実数は次のような 2 つの種類に分けられる．

(a) **有限超実数**：ある正の標準実数 M に対して $|x| < M$ が成り立つとき，x を有限超実数と言う．だから x は実数直線上の $-M$ と M の区間の

どこかにある．この基本的な性質をキースラーは「標準部分公理」と呼んだ．正確に言えば次のようになる．

任意の有限超実数 x はある標準実数 a に近い．

また，1つの x が2つの異なる標準実数に近いことはないので，$x \approx a$ となる唯ひとつの標準実数 a を x の標準部分と言い，$\mathrm{st}(x)$ で表す．したがって有限超実数 x と y に対して，$x \approx y$ と $\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y)$ は同値であり，また x が無限小であることと $\mathrm{st}(x) = 0$ は同値である．

(b) **無限大超実数**には，正のものも，負のものもある．図6に，いろいろなタイプの超実数が描かれている．

さて，次にすることは生徒が超実数に親しめるように，具体的な計算をさせてみることである．キースラーの本には多くの練習問題があり，たいへん役に立つ．

まず，計算規則を書き上げておかなければならない．

(a)
$$\left.\begin{array}{l}\text{無限小} + \text{無限小}\\ \text{無限小} \times \text{有限超実数}\end{array}\right\} = \text{無限小}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{l}\text{無限大} + \text{無限大(両方とも正か両方とも負)}\\ \text{無限大} \times (\text{有限} \not\approx 0)\end{array}\right\} = \text{無限大}$$

(c)
$$\text{有限} + \text{有限} = \text{有限}$$
$$(\text{有限} \not\approx 0) \times (\text{有限} \not\approx 0) = (\text{有限} \not\approx 0)$$

(d)
$$\frac{1}{\text{0でない無限小}} = \text{無限大}$$
$$\frac{1}{\text{無限大}} = \text{0でない無限小}$$
$$\frac{1}{\text{有限} \not\approx 0} = \text{有限} \not\approx 0$$

注意する点：無限小/無限小と，(0でない無限小) × 無限大と，無限大 − 無

限大 についての規則はない．例えば，$\varepsilon \approx 0$，$\varepsilon \neq 0$ のとき $\varepsilon^2/\varepsilon$，$\varepsilon/\varepsilon$，$\varepsilon/\varepsilon^2$ はすべて 無限小/無限小 の形をしているがそれぞれ，無限小，有限 $\not\approx 0$，無限大となっている．一方，無限大 $\times\, 0 = 0$ であり $1/0$ は定義されない．

次の 2 つの練習問題を解いてみよう．

問題 I：与えられた $\varepsilon, \delta \approx 0$ に対して，$(3+\varepsilon)/(2+\delta)$ の標準部分を求めよ．

解：$(3+\varepsilon)/(2+\delta) \approx 3/2$ と予想される．たしかに，差

$$\frac{3+\varepsilon}{2+\delta} - \frac{3}{2} = \frac{2\varepsilon - 3\delta}{2(2+\delta)} = (2\varepsilon - 3\delta) \cdot \frac{1}{2(2+\delta)}$$

は，先ほどの規則から，無限小になっているのでよい．

注意：この問題は，次の法則の特別な場合である．すなわち $a' \approx a$，$b' \approx b$（ただし a, b は有限）のとき次が成り立つ．

(I) $a' + b' \approx a + b$,

(II) $a'b' \approx ab$,

(III) $\dfrac{a'}{b'} \approx \dfrac{a}{b}$ ($b \not\approx 0$ のとき).

この法則を確かめるには，$a' = a + \varepsilon$，$b' = b + \delta$ とおいて，上と同じように示せばよい．

問題 II：$x \approx 1$ だが $x \neq 1$ のとき，$(x^2-1)/(x^2+x-2)$ の標準部分を求めよ．

解：よく理解している生徒はすぐに，$x \approx 1$ のとき

$$x^2 - 1 \approx 1^2 - 1 = 0,$$
$$x^2 + x - 2 \approx 1^2 + 1 - 2 = 0$$

なので，これは 無限小/無限小 の形をしていることに気づき，難しいと感じるだろう（しかし，難しさに気づかないことさえも十分ありうる！）．自然な解答としては $x = 1 + \varepsilon$，$\varepsilon \approx 0$ とおき，次のように計算する．

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{(1+\varepsilon)^2 - 1}{(1+\varepsilon)^2 + (1+\varepsilon) - 2} = \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{3\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{(2+\varepsilon)}{(3+\varepsilon)} \approx \frac{2}{3}.$$

(もっと洗練された方法としては次のようにする.

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}\approx\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}.)$$

この問題 II は，微積分学を勉強するときいつも出てくる $\lim_{x\to 1}(x^2-1)/(x^2+x-2)$ を計算せよ，という問題にそっくりである．たしかに結果としては次のように言える．$f(x)=(x^2-1)/(x^2+x-2)$ とおくと，$x\approx 1$ かつ $x\neq 1$ のとき $f(x)\approx 2/3$ を得る．すなわち x が 1 に近いが 1 とは異なるとき，$f(x)$ は 2/3 に近い．このことは，$\lim_{x\to 1} f(x)=2/3$ の意味を，無限小の言葉で表したことになる．

では，任意の関数 $f(x)$ に対しては，極限の意味はどのように定義されるだろうか？ それには次のような定義が考えられるだろう．

> $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ とは，x が a に近く，a とは異なる値のとき，
> $f(x)$ の値が ℓ に近いときを言う．　(*)

いままで関数 f は，**標準実関数**として与えられていると考えていた．すなわち関数の定義域 D は，標準実数の集合であり，値 $f(x)$ $(x\in D)$ も標準実数である．しかし上の定義 (*) の x は，超準実数をとることが許されている！ したがって (少なくとも 1 つの) 超準値 x に対しても，$f(x)$ は定義されていると仮定しなければならない．

ある特定の関数 $f(x)=(x^2-1)/(x^2+x-2)$ に対しては，実数 x に対してだけでなく，1，-2 とは異なるすべての超実数 x に対して**自動的に**定義されるので，問題はない．なぜなら $f(x)$ は有理関数，すなわち x と定数に算術の四則演算をほどこしたものであって，超実数上でも定義できるからである．

しかしこの定義を，算術演算の組合せに限定する必要はない．実際に，ある標準実数値 x で定義された任意の関数 $f(x)$ は，**対応する**超実数に対して，自動的に定義される．本来単純なことだが，多くの例について確かめて，はっきりさせる必要がある．例えば $\tan x$ は，$(2k+1)\pi/2$ (k は標準整数) を除く，すべての実数 x で定義されるが，これはまた，$(2k+1)\pi/2$ (k は超準整数) を除く，すべての超実数 x でも定義される．実はすでに，0 でない $\alpha\approx 0$ に対して $\tan\alpha$ を使っていた．公式：$\tan(x+y)=(\tan x+\tan y)/(1-\tan x\tan y)$ は，超実数 x, y に対しても当然成り立つ．同じように $\log x$ は，すべての正

の超実数に対して定義された関数で，公式：$\log xy = \log x + \log y$ も成り立つし，$\sqrt{x}$ は，すべての負でない超実数に対して定義されることなどが言える．

教師は多くの練習問題を通して，この考え方を徐々に伝えていかねばならない．すると定義 (*) の意味が，はっきりと分かってくる．式として書いておくと次のようになる．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall x \approx a \; (x \neq a \longrightarrow f(x) \approx \ell) \qquad (1^*)$$

次の式も定義しておこう．

$$\begin{aligned} f \text{ は } x \text{ で連続} &\iff \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x) \\ &\iff \forall \varepsilon \approx 0 \, (f(x+\varepsilon) \approx f(x)) \qquad (2^*) \end{aligned}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \qquad (\text{すべての } \varepsilon \approx 0,\ \varepsilon \neq 0 \text{ に対して}) \qquad (3^*)$$

ただし (2*) の x と，(3*) の x，$f'(x)$ は標準的とすることには注意しなければならない．

初めに述べたように，ライプニッツは，x の無限小変化を表すものとして「dx」を使った．いま，$y = f(x)$ とおこう．このとき，x の値が x から $x + dx$ へ無限小の変化をしたとき，y の値が $f(x)$ から $f(x+dx)$ へ変化する．だから y の変化は $f(x+dx) - f(x)$ である．もし f が連続であれば，この変化は無限小であって，ライプニッツはこの変化を「dy」で表した．すなわち $dy = f(x+dx) - f(x)$ であり，

$$f'(x) \approx \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

である．この考えをもとにライプニッツは，おなじみの記法 dy/dx を導入した．等式 $f'(x) \approx dy/dx$ は巨視的であり，微視的に書けば $f'(x) = \mathrm{st}(dy/dx)$ となることに注意しよう．すでに述べたように，ライプニッツはこのような記号の違いを気にしなかったのである．

ここに，キースラーの本から 2 つの図を載せてある．教育的に，顕微鏡がうまく使われている．読者は $\cos x$ の微分係数が，$-\sin x$ となる ($\sin x$ ではない) ことを示してみるとよい．

ここまで，無限小を使って直観的なレベルで，微積分学を教える方法につ

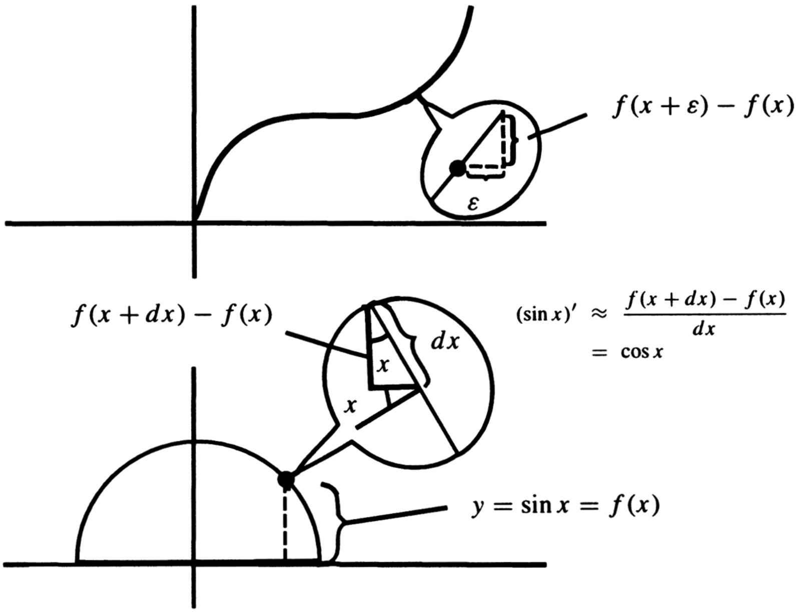


図 7

いて，読者に提供しようとしてきた．しかしまだ，微分学の初歩しか述べていない．キースラーの大学向け教科書には，積分学を含め，十分な結果が述べられている．その多くは，高校教育にも適している．

無限小を使った方法は，形式的な定義を直観的に理解できる点で，すばらしいものだ．ε-δ 論法に慣れたプロの数学者でも，極限を「$x-a$ が十分小さければ $f(x)-\ell$ が十分小さい」というようにとらえている．極限の，超準的な (無限小を使った) 定義は，この直観的なイメージを表しているので理解しやすいし，扱いも易しい．例えば，先に述べた問題 II は高校生でも解くことができる．つまり等式 $\lim_{x\to 1}(x^2-1)/(x^2+x-2)=2/3$ の正しい超準的な証明を与えることができる．この等式を標準的に (つまり ε-δ 論法を使って) 証明できる生徒は，何人いるだろうか？ 非常に少ないと思う．

さらに，定義の「論理構造」について，標準的な定義よりも超準的な定義の方が，単純になることも挙げておこう．例えば，極限の超準的な定義 (*)

は，**すべての** x に対して，**量化記号を含まない**ある条件をみたす，ということを述べている (ここで,「すべての」を表す ∀ を全称記号と言い,「存在する」を表す ∃ を存在記号と言う．∀ と ∃ は量化記号とも呼ばれる)．これに対して，標準的な定義では,「**すべての** ε に対して，**ある** δ **が存在**して，**すべての** x に対して，...」というように量化記号が**互い違い**に現れる．量化記号が互い違いに (つまり，∀∃... とか，∃∀... とか) 多く現れると，その意味を理解することが難しくなる．量化記号の現れ方について，標準的な定義よりも，超準的な定義の方が，単純なのである (この点はキースラー教授の指摘による)．

● ロビンソンの成果の本質 ●

ここまで述べてきたことではまだ，ロビンソンの発見の本質と重要性が明らかにされていない．ここでは細かい点をできるだけ省いて説明したい．

まず，新しい数学的な概念の誕生について，次の 3 つの段階を追って検討してみよう．

(a) **準備の段階**　新しい概念は必要だから生まれてくる．たいていは，初めばく然としていて，概念をつくり出した人でも不安に思うこともある．

この段階は，例えば，無理数，虚数，イデアルなど，数についての概念を見ればよく分かる (名前だけ見ても，疑う気持ちが現れている)．他に，点，直線，平面などの幾何的な概念や，関数の概念がよい例である．

(b) **普及の段階**　新しい概念というのはくり返し使ってみて初めて，信頼性が高まり，具体的に分かるものだ．この段階の次に公理化を考えるが，それよりもずっと以前にあって構わない．よい例が自然数である．自然数は遠い昔に発見されて，十分理解されていた．しかし，公理が考えられるのは (ペアノ (Giuseppe Peano) による) 19 世紀の終わりである．同じように，ギリシャ時代には有理数も，無理数も理解されていたが，公理化は 2000 年後 (19 世紀) である．

(c) **公理化の段階**　次の 2 つの段階に分けられる．

(c1) **実質的な公理化**　ある概念の基本となる性質を**公理**として選び出す．他のすべての性質はこの公理から導き出されるようにする．おそらく幾何学についてのユークリッドの公理が最初のものだろう．現在，欠点は指摘されているが，非常に重要なものであることには変わりない．実数についての実質的な公理化は，19 世紀後半になってからである．実数の公理のうちで,「上に有界な (空でない) 任意の集合は，最小の上界をもつ」というのが，最もよく特徴を表している．

(c2) **形式的な公理化**　これは，100 年くらい前に必要性がでてきた現代的なもので，本質は今世紀になって，具体化してきた．

現代の数学者は，ある概念についての公理のリストを見て，矛盾がないことをどうやって確かめるか考える．しかし，ときには直観に反して，公理のリストすべてをみたす構造は存在しない，ということもある．普通は，考えている公理の**モデルを作る**こと，つまり公理のすべてをみたす対象の集まりを作ること，で解決される．

「数学的に十分熟達した」人のみが，このようなモデルを完全に理解できる．難しく感じるのは，モデルの対象と，公理のもとになった直観とが，まったく似ていないことがよくある，という点である．例えば，実数に対するいろいろなモデルがある．デデキント切断によるものは有名である．これは，実数の公理はみたすけれども，対象としては，有理数の無限集合のある組であって，直観的に思い浮かべる実数とは似ていない．それでも，上級の教科書では，デデキント切断は**実数と同一視する**となっている．これは数学的には正確だが，もし初学者に教えれば (無配慮にも行われていたりするが)，よくてパズル，悪くすれば悪夢のような印象を与えるだろう．

無限小に話を戻そう．いま述べた 3 つの段階について，歴史を検討してみると，1960 年になるまでは最初の段階が終わったにすぎないことが分かる．一方，第 2 の段階は (普及の段階だが) まじめな努力にもかかわらず，うまくいっていなかったことも分かる．1960 年にロビンソンは，見事に**公理化の段階**を実行した．無限小についての (正確には超実数についての) 公理を書き上

げて，モデルを (実際には多くのモデルを) つくった．そうすることで，無限小がどんなものかを説明し，結果的に，公理化によって**普及の段階**に達した．さらにキースラーがロビンソンの公理を単純にした．キースラーの公理で必須のものが，いわゆる「解の公理」である．これは次のように述べられる：$f(x)$ と $g(x)$ を x についての**標準的**な表現 (すなわち，いくつかの標準的な実数関数と定数を合成してつくった表現) とするとき，$f(x)=0$ と $g(x)=0$ がちょうど同じ実数解をもつことと，それらがちょうど同じ超実数解をもつこと，が同値である．すなわち，式として書くと，性質 $\forall x\,(f(x)=0 \longleftrightarrow g(x)=0)$ が実数に対して成り立つことと，超実数に対して成り立つことが同値である．だからいま我々は，ライプニッツによる，ばく然とした連続性の原理 (「ある性質が，実数に対して成り立つことと，超実数に対して成り立つことが同値になる」原理) の特別な場合を，正確に述べたことになる．微積分学の目的のためには，特別な場合だけで十分である．

最後に注意したいのは，ロビンソンは (キースラーもそうだが) 記号を，慎重に区別して使ったことである．すでに述べたように，2 つの異なる関係 $\approx$ と $=$ がある．$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし，$\mathbf{R}^*$ を超実数全体の集合とする[2]．もちろん $\mathbf{R}^* \supset \mathbf{R}$ である．定義域を $D \subset \mathbf{R}$ とする標準実関数 f は，(先に述べたように) 対応する超実数に対して「自動的に」定義される．詳しく言うと，f に対して定義域 D^* をもつ関数 f^* が対応して，$D \subset D^* \subset \mathbf{R}^*$ であり，すべての $x \in D$ に対しては $f^*(x) = f(x)$ であるが，その他の $x \in D^*$ に対しては $f^*(x)$ は超実数となる．この f^* を f の**自然延長**という．例えば，$f(x)=\sqrt{x}$ の場合，f の定義域 D は負でない実数の集合であり，自然延長 $f^*(x)=\sqrt{x}^*$ の定義域 D^* は負でない超実数の集合である．すべての $x \in D$ に対して $\sqrt{x}^2 = x$ だから，解の公理から，すべての $x \in D^*$ に対して $(\sqrt{x}^*)^2 = x$ となる．

実際に教育するときには，関数とその自然延長を，記号としては区別しない方が便利である．だから，超実数の加法を「$+^*$」とは書かない (本当はこう書かなければいけない！)．キースラーの本では，導入部のすぐ後から「f」を，標準関数と自然延長のどちらに対しても使っている．

---

2 ［訳注］超実数全体を $^*R$ で表す文献も多い．

おそらく，高校で教える際には，記号の違いをまったく出さないのがよいだろう．

結論

キースラーが示してくれたのは，無限小は，古き良き時代の役立つ道具だが，ライプニッツゆかりの精神をほんの少し発展させれば，微積分の教育に使うことができることである．昔と違うのは，以前ははっきりしていなかった ≈ と = の違いをはっきりと示すこと，そして「標準部分」などの概念を使うことである．私たち教師にとって，ロビンソンの成果の最も重要な側面は，教室で「無限小」の話をする際に，自分たちが何を話しているのかを理解しているという自信を与えてくれたことである．

参考文献

[1] H. J. Keisler , *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976. (Review: M. Davis and M. Hausner, "The Joy of Infinitesimals," *The Mathematical Intelligencer* 1 (1978), pp.168–170).

[2] H. J. Keisler , *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976. (キースラー著『無限小解析の基礎』斎藤正彦訳，東京図書)

[3] I. Lakatos , "Cauchy and the Continuum," *The Mathematical Intelligencer* 1 (1978), pp.151–161.

[4] A. Robinson , *Non-standard Analysis*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.

[5] K. Sullivan , "The Teaching of Elementary Culculus" *The American Mathematical Monthly* 83 (1976), pp.371–375.

バナッハ・タルスキの定理

ロバート M. フレンチ (Robert M. French)

信じがたいかもしれないが，1 つのオレンジを有限個の破片に切り分けて，それらをつなぎ合わせ，大きさが元のものとまったく同じのオレンジを 2 つ作ることは理論的に可能である．それは本当である，すなわち十分な念入りさと器用さとをもってすれば，どんな 3 次元の物体からもそれとまったく同じ 2 つの物体をつくり出すことができるのである．

数学者は (バナッハ・タルスキの定理として知られている) この結果を初めて耳にしたとき，普通は多少飽き飽きした感じがするものである．というのは，無限に対峙するときにはいつもおかしな，直観に反することが起こることを知っているからである．ほとんどの数学者はこの結果に大学院生時代に初めて出会い，(平面を埋め尽くす曲線，カントル集合，非可測集合などといった) 奇妙な結果のつまった棚にしまい込む．この結果に対しては，1924 年にバナッハ (Stefan Banach) とタルスキ (Alfred Tarski) によって選択公理を用いた比較的簡明な証明が与えられているにもかかわらず，多くの数学者も，この結果に出会った素人科学者ほどにしか思いを巡らせることはないのである．

無限についての数学はほとんどの場合，直観に反するものであり，これは 19 世紀終わりにゲオルグ=カントル (Georg Cantor) が無限の中に異なる大きさが存在するという，まったく驚くべき結果を証明して以来，常にそうであった．この結果は当初，数学界を非常に当惑させ，アンリ=ポアンカレ (Henri Poincaré) などは，これは数学が克服しなければならない病であると吐き捨て

たほどであった[1].

この小文の目的は，無限の神秘を説明することでも，バナッハ・タルスキの定理の証明を与えることでもない．そのかわり，このすばらしい定理の証明の基本的なアイデアの説明につながるような，無限についての簡単な事柄を解説する．

まずちょっとした初等幾何から始めよう．平面上の2つの部分集合が合同であるとは，平行移動と平面上の回転のみを用いて，正確に2つを重ね合わせることができることをいう．合同性の本質的な部分は，1つ目の集合の各要素間の距離が2つ目の集合に重ね合わせたときに同じであるということである．この合同性はしかしながら，1対1対応と混同してはならない．例えば偶数の集合 $\{2, 4, 6, \ldots\}$ は自然数全体 $\{1, 2, 3, \ldots\}$ とは重ね合わせる方法が存在しないので，合同ではないが，これらは1対1に対応する．しかし，無限集合がその真部分集合と合同にならないわけではない．例えば，$\{1, 2, 3, \ldots\}$ と $\{5, 6, 7, \ldots\}$ という2つの無限集合を考えれば，これらは前者の各要素を右に4だけ移動することによって合同となる．

• 有限分解による同値性 •

オレンジの場合に戻ってみよう．実際にこれを2つのオレンジにつくりかえる前に，まず，“有限分解による同値性”の概念が必要である．そのややこしい名前とは裏腹に，考え方は単純である．基本的には，ある物体 X を互いに交わらない有限個の断片に分割し，それらを組み換えて，新しい物体 Y を作ることである(与えられた集合を“組み換える”とは，各断片について最初の状態と最後の状態が合同になっているということである)．このような場合に，X は Y と有限分解によって同値であるという．この種の同値性は推移的である．すなわち X が Y と同値で，さらに Y が Z と同値なら，X は Z と同値になる．

さて，まず最初の“パラドックス”について考えてみよう．それは正整数全体の集合 N は，1つの元の分だけ“穴”の空いた整数――すなわち，ある要素

[1] Martin Gardner , *Mathematical Carnival*, New York Vintage Books, 1965 Ch. 3, p.27.

を 1 つ，例えば 5, を取り除いた整数の集合——と有限分解によって同値になる，というものである．このような事実はいろいろな方法で確認できるが，以下の例はこれ以降の話において最も示唆的なものである．まず N の部分集合を 2 つ作る．1 つは 5 の倍数の集合 (すなわち $\{5, 10, 15, \ldots\}$) B であり，もう 1 つはその補集合 (すなわち $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, \ldots\}$) A である．定義によってこの 2 つの集合は交わりを持たず，しかも和集合は N 全体に等しい．さて，ここでこの証明，そしてバナッハ・タルスキの定理を含めて，この記事における証明すべての鍵となるテクニックを紹介する．我々はこのテクニックを "無限に向かう平行移動" と呼ぶことにする．B を無限に向けて 5 だけ平行移動すると，$\{10, 15, 20, \cdots\}$ で表される新たな集合 B' ができるが，これは定義により，B と合同である．いま，1 つ目の直和 $(A \cup B)$ は正整数全体に等しく，2 つ目の直和 $(A \cup B')$ は正整数から 1 つの要素 5 を除いたものに等しい．しかし，すでに述べたように B と B' は明らかに合同であり，しかも A が自身に合同であることも明らかである．したがって整数の集合とそれから 5 を取り除いた集合は有限分解により合同であることが言えたわけである．

次の証明はもう少し複雑ではあるが，N と $N \setminus \{5\}$ が有限分解により同値であることの証明で用いたのと同じく，無限への平行移動の原理に基づくものである．今度はある円と円から 1 点だけ穴を開けたものを考える．この 2 つの集合は有限分解によって同値であることがここでの主張である．その証明のアウトラインは次のとおりである．

C を半径 1 の円とし，0 を C の円周上の (取り除かれる) 1 点とする．点 0 から初めて円周上を反時計まわりに円の半径 1 だけまわる．このとき，次に止まる点を 1 として，まわり続ける．1 だけ進むごとに止まった位置に順に 2 などの印をつけていく．このとき，これらの点すべての集合 $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ を B とする．

前の例と同様に，B に入らない (円周上の) 点を A で表す．いま，B をテレビのチャンネルに見立てて，ダイアルを 1 つだけ左に回す．このとき集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ は $\{1, 2, 3, \ldots\}$ に写される．この 2 番目の集合を B' とすると明らかに B と B' は合同である．円 C は $A \cup B$ に等しく，円から点 0 を除いた集合は $A \cup B'$ に等しいから，円とその 1 点に穴を開けたものは有限分解によって互いに同値になる．

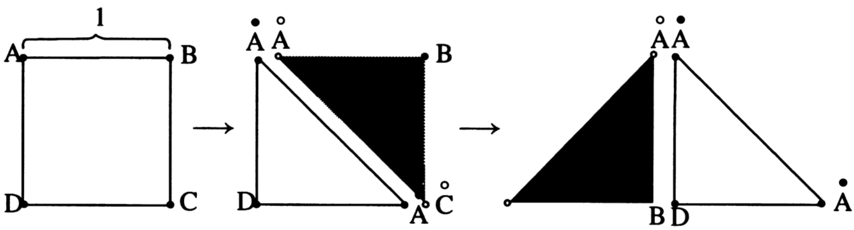


図 1： 正方形を 2 等辺 3 角形につくり変える方法

次に 1 辺が 1 の正方形は分解して集め直すことによって，高さがその正方形の 1 辺の長さに等しい 2 等辺 3 角形につくり変えることができるということを示す．

まず，はじめに正方形を対角線に沿って切り，直角 3 角形を 2 つ作る (図 1 をみよ)．求める 2 等辺 3 角形は，2 つの直角 3 角形を短い辺の片方で重ねて，2 つの斜辺が 1 点で重なるようにすればいいように思われる．しかしながら，この方法ではうまくいかない．正方形の対角線は 1 つの 3 角形の斜辺にのみ使えるのであって，両方ともというわけにはいかない．さらに，有限分解による同値性の定義においては，各部分は交わりを持たないことが必要である (これは少なくとも実世界における，あるものをいくつかに分ける，ということの意味するものには対応している)．物体を半分に切るとき，ある点がその両方ともに含まれることが，あってはならない．図 1 はこの条件をみたすような正方形の切り方を示している．

残念ながら，2 等辺 3 角形の高さとなる辺には 2 つの候補があり，1 つの斜辺にはまったく点がないということになる．では余分な高さの辺の 1 つを取り除いて，点のまったくない辺に沿って “貼りつけ” てはどうか？ このトリックはほぼうまくいくように見えるが，少しだけ物足りないところがある．この長さ 1 の辺を貼りつけても “穴” は残るのである．すなわちまだ長さ $\sqrt{2}-1$ の辺が必要なのである．そこで，無限への平行移動のテクニックを使って，元の正方形から求める長さの線分を切りだし，この “盗用” によって数学的に有害な結果がまったく起きないことを示す．そうすれば容易にこの盗み出した線分を 3 角形の斜辺の穴に貼りつけて終了する．

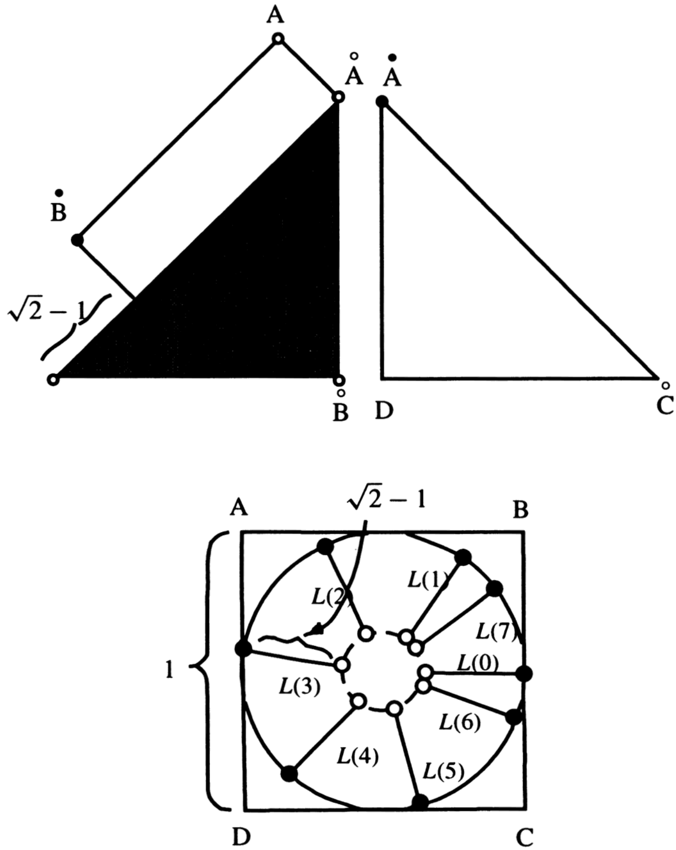


図 2：単位正方形は，その正方形から長さ $\sqrt{2}-1$ の線分を除いた図形と同値である

いかにして求める線分を元の正方形から盗み出すか？ 基本的には，正方形はその線分を取り出したものと有限分解により同値であることを示せばよい．正確には，この線分は長さが $\sqrt{2}-1$ で一方の端点を含み，もう一方は含まないものでなければならない．この盗用のテクニックは円とそれから 1 点を除いたものが有限分解で同値であることを示したときのものとほとんど同じである．ただ，今回は円から点を取り除くのではなく，円板から線分を取り除く．よってまずはじめに，この例の正方形の上に円 C を描き，C を境界と

する閉円板 D を考える．点 $0, 1, 2, \ldots$ それぞれに長さ $\sqrt{2}-1$ の線分を取り付ける (図 2 をみよ)．この線分を $L(0), L(1), \ldots$ で表すことにする．残りの証明は前の証明で円 C を円板 D に，点 0 を線分 $L(0)$ に置き換えたものとまったく同じである．したがって，円板とそれから線分を取り除いたものが有限分解によって同値であることが示された．さらに，この線分を盗み出したことによって，正方形内の円板の外の部分はまったく影響を受けないから，正方形は線分を除いたものと有限分解により同値であることもいえる．最後に $L(0)$ を 3 角形の斜辺のすき間に入れれば，閉じた正方形は閉じた 2 等辺 3 角形と有限分解によって同値である，という求める結果を得る．

ここまでにおいて，我々がしたことというのは，無限への平行移動によって，その大きさがそれを含む集合に比べて問題にならないくらい小さな集合を取り除くこと，すなわち，円から点をとったり，円板から線分を除いたり，であった．これは多少は興味深いことかもしれないが，決して印象的というほどのことではない．そこでこのテクニックが球体のようなもっと大きな集合にも適用できることを見てみよう．

● ハウスドルフのパラドックス ●

いま，我々は 1 つのオレンジを 2 つにするのに必要な道具を得た．バナッハ・タルスキの定理の中核はフェリックス=ハウスドルフ (Felix Hausdorff) の結果に基づいている．ハウスドルフの結果はオレンジの皮 (厚さ 0 の “皮”) のみに関するものである．ハウスドルフのパラドックスと呼ばれるそれは，この皮から十分小さな (より正確には可算無限個の) 点の集合を取り除けば，3 つの集合 A, B, C に分解し，$A, B, C, B \cup C$ がすべて互いに合同であるようにできることを示している．これはまったく奇妙なことである！ これら 3 つの集合がお互いに合同であるというのは，A は自分自身の 2 つのコピーの直和と合同になることを意味している．これは A の逆説的分解として知られる．つまり注意深く A, B, C を組み換えれば，完全なオレンジの皮の集合で，それぞれが元のオレンジの皮と有限分解によって同値になるようなものが 2 つ得られるのである．言い換えると，1 つの球面を切り刻んで集め直せば，元

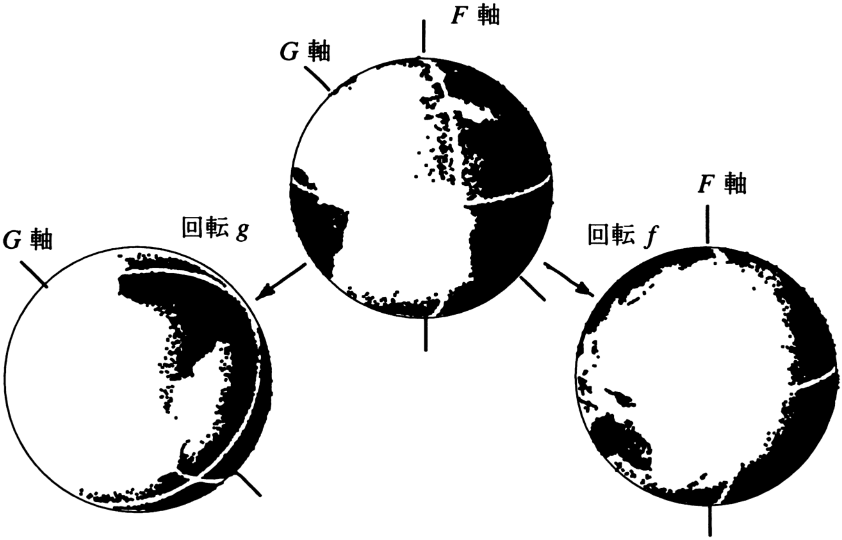


図 3：球の変換は F, G 軸のまわりの回転から構成される．この軸の間の角度は fg と gf が等しくならないようにとられている

のものと同じ球面が 2 つできるということである．

同じことが球体でもできるだろうか？ 答はイエスである．直観的にはハウスドルフのテクニックを，中が空洞の球に適用して，それをどんどん厚くしていくと考えればよい．すると最後にはこの構成法を中が 1 つの点だけの“空洞”の球に適用して，中心点のないまったく同じ 2 つの球をつくり出すことができる．このようにして，可能なかぎり球体に近いもの，すなわち中心だけのない球体に対して，この構成ができたことになる．ここまでくれば，球体と，その中心のない物体が有限分解により同値であることをいうのはきわめて簡単である．以上でバナッハ・タルスキの定理，球体は自分自身のコピーと有限分解により同値であること，の証明は終わりである．

さて，ここで，バナッハ・タルスキの定理の頼みの綱である，ハウスドルフのパラドックスの証明を見てみよう．ハウスドルフの構成法は，球体の表面 (すなわち球面) のみに関するものであり，球体に対してではないことに注意しよう．

球体 S が与えられたとき，これに対して 2 本の軸 F と G を定める．この 2 本の軸が球面の中心でなす角度は 45° とする．球面の軸 F に対して時計回りの 180° の回転を f, 軸 G に対する時計回りの 120° 回転を g で表す．f と g を球面の変換と呼ぶ (図 3 を見よ)．これらの変換の組合せで，球面のいろいろな回転操作の列を表す．例えば変換の合成 g^2f は F のまわりに 180° 回転してから，G のまわりに 2 回 120° 回転するという操作を定める．指数が必要以上に大きくなるのを避けるため，g^2 を $\bar{g}$ で表す ($\bar{g}$ は時計回りの 240° 回転だけでなく，逆方向の 120° 回転も表していることを覚えておくこと)．以降では，$f, g, \bar{g}$ を初等変換と呼ぶ．球面の位置が与えられたとき，f を続けて 2 回用いると，球面は元の位置に戻る．これを $f^2 = 1$ と書く．ここで 1 は恒等変換——すなわち球面の位置を変えない変換——である．同様に g は 120° 回転だから，$g^3 = 1$ である．

この 2 つの観測により，複雑な変換をより簡単な形にすることができる．例えば，$g^5f^3 = (g^3)(g^2)(f^2)f = 1\cdot(g^2)\cdot 1\cdot f = g^2f$ となる．この一方で，変換の合成 $gfgfgf\bar{g}$ はどのようにしてもこれ以上単純な形にはならない．というのは F と G を定める際に，gf が fg と等しくならないようにしておいたからである．言い換えると，与えられた球面の位置から，g, f の順に変換を施すのと，f, g の順に施すのとでは球面は異なる位置に移るのである．

我々に興味のある変換は，最も単純な形にした変換だけである．そこで，そのような変換全体の集合 Q をつくり出すのに，反復機械を用いる (図 4 をみよ)．この機械を動かすには，まず恒等変換 1 を漏斗に入れる．すると機械は次の 3 つの規則にしたがって動く：(1) 漏斗に入っている変換が 1 だけなら，3 つの初等変換 $f, g, \bar{g}$ を作る．(2) 左端が f である変換が規則箱を通り抜けるときには，次の 2 つの変換がつくられる．1 つは箱に入っている変換に g による回転を付け加えたもの，もう 1 つは $\bar{g}$ を付け加えたものである (例えば，$f\bar{g}f$ が規則箱に入ったら，$gf\bar{g}f$ と $\bar{g}f\bar{g}f$ がでてくる)．(3) 規則箱を通り抜ける変換の左端が g か $\bar{g}$ のときは，それに f による回転を付け加えたものがでてくる (例えば，$gf\bar{g}$ が規則箱に入ったら，$fgf\bar{g}$ がでてくる)．

規則箱でつくられた変換は次に変換コピー機に落され，各変換のコピーがつくられて，漏斗に戻される．また，オリジナルは機械の下の，変換がたくさんつまった収集箱に入れられる．このようにして変換 $1, f, g, \bar{g}, fg, gf, \bar{g}f, \ldots$

からなる集合 Q が生成される．F と G のなす角のとり方によって，Q の各要素ははじめの球面の位置に対して，他のどれとも異なる位置を表すことが保証される．

● 反復機の完成 ●

この機械の漏斗，規則箱，変換コピー機，収集袋の 4 つの部分が，バナッハ・タルスキの定理に必要な，より強力な反復機の基礎になっている．完全な反復機は Q の変換すべてをつくり出せさえすればよいというわけではなく，互いに交わらない 3 つの部分集合 I, J, K で，和が Q であり，次の性質

$$fI = J \cup K;\ gI = J;\ \bar{g}I = K$$

を持つものに分ける作業をしなければならない．

上の式は何を意味しているのだろうか？ 1 番目の式 $fI = J \cup K$ を考えてみると，これは f (時計回りの 180° 回転) を I の変換すべてに適用すると，変換の集合 $J \cup K$ が得られるということを言っている．これはすなわち，I は $J \cup K$ と合同であるということである．同様に $gI = J$ というのは g (120° の時計回り回転) を I の変換すべてに与えると，ちょうど J の変換すべてになるということであるから，I は J に合同ということである．同じようにして I は K に合同であることも分かる．

図 5 にこの 3 つの変換の集合 I, J, K をつくり出す完全な反復機を示す．基礎となる (図 4) との主な概念上の違いは，変換の振り分け機が 3 つ付け加わっているところである．この振り分け機の役割は単純であって，それは振り分け機に入ってきた変換の左端の初等変換のみに基づいて，その下についているどの管に送り出すかを決定するのである．機械は逐次的に動作する．まずはじめに，I 漏斗の変換すべてを処理し，次に J 漏斗，そして最後に K 漏斗の順で処理した後，I 漏斗に戻る．これによりこの機械のサイクルという表現をすることが可能になる．バナッハ・タルスキの定理の証明の鍵となるテクニックを指摘しろと言われたら，私はためらいなく球面の変換の集合 Q の互いに交わらない 3 つの部分集合 I, J, K をつくり出す，この賢明な方法を挙げるだろう．図 6 ではこの機械による製造工程のいくつかの段階を示して

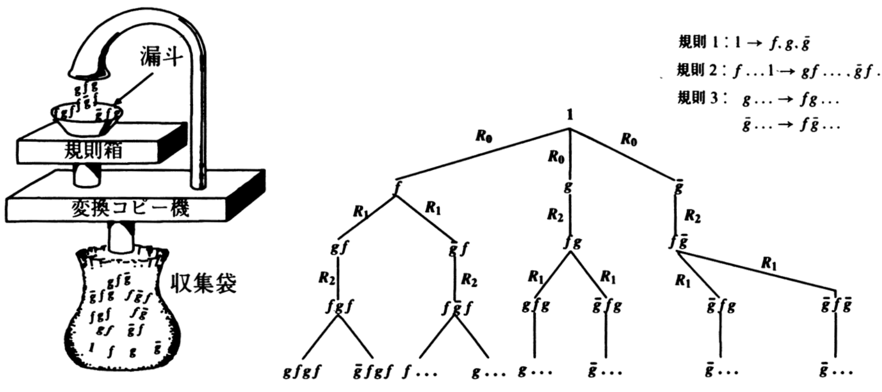


図4：可能な変換すべてをつくり出す単純な機械

いる．

少なくとも実験の上では，Q のいくつかの部分集合の間に求めるべき関係が成り立っている．それはすなわち，$fI = J \cup K, gI = J, \bar{g}I = K$ のことである．

断片的な事柄が 1 つに集約しつつあるのだろうか？ ハウスドルフのパラドックスによれば，球面を (可算集合を除いては) 互いに交わりのない点集合 A, B, C に分解して，$A, B, C, B \cup C$ が互いに合同となるようにできる．我々は反復機を用いて，3 つの変換の集合 I, J, K で $I, J, K, J \cup K$ が互いに合同になるようなものをつくり出した．これは偶然の一致にしてはできすぎていると思われるだろうか？ それは正しい．実際，我々は結末に向かいつつあるのである．

●1 つの球面を 2 つに

再び球面の場合に戻ろう．中心を定めて，あらゆる方法で，何度球面を回転したとしても，はじめの位置からその最後の位置まで 1 回だけ回転すれば移ることができるような軸をちょうど 1 つ見つけられる．我々はこのような軸を Q のすべての変換に対して見つける．各変換に対して，その変換の回数

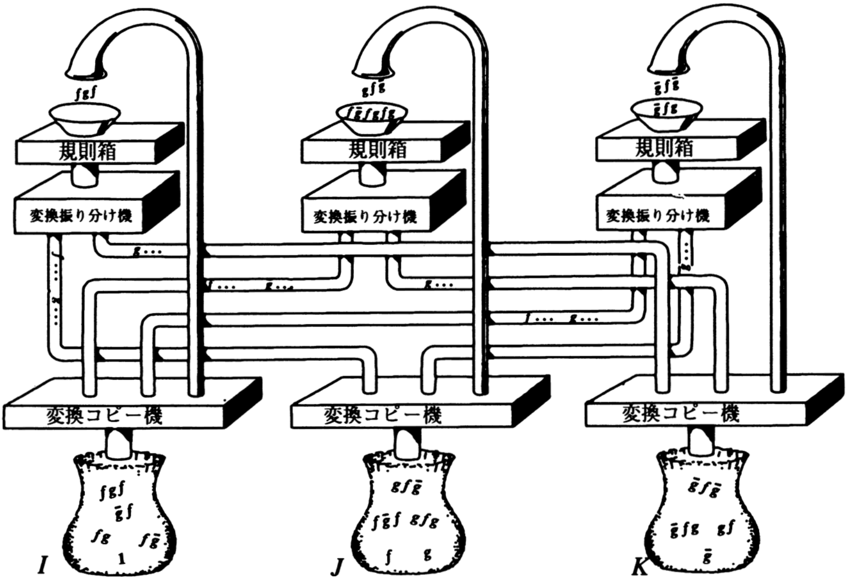


図 5：すべての変換をつくり出して振り分ける完全な機械

	サイクル 0	サイクル 1	サイクル 2	サイクル 3
袋 I の内容	1	1	$1, fg, \bar{g}f, f\bar{g}$	$1, fg, \bar{g}f, f\bar{g}, fgf$
袋 J の内容	空	f, g	f, g	$f, g, f\bar{g}f, gfg, gf\bar{g}$
袋 K の内容	空	$\bar{g}$	$\bar{g}, gf$	$\bar{g}, gf, \bar{g}fg, \bar{g}f\bar{g}$

図 6：変換作成・振り分け器の最初の反復の結果

には関係なく，はじめの位置から最後の位置まで直接移ることのできるような回転軸を見つける．この軸は球面を極点とでも呼ぶべき 2 点を突きぬける．次に，Q の各変換に対する極点を集めた集合を D とする．この D は，Q に属する少なくとも 1 つの変換に対し位置を変えない点の集合である (この D は可算集合であって，球面全体と比べてきわめてわずかであることが分かる)．それ以外の点はすべての Q の変換によってその位置を変える．この点の集合を D^* または $S \setminus D$ (ここで S は球面) と表すが，我々の興味はこれにあるのであって，しかも実質的にはこれが球面全体なのである．

3つの点集合 A, B, C で直和が D^* になるものを作るにはどうすればよいか？ D^* の各点 p に対して，Q の変換すべてを施し，その移った先を集めた集合を $Q(p) = \{p, f(p), g(p), \bar{p}(p), fg(p), \ldots\}$ とする．異なる2つの点 p と p' に対して，$Q(p)$ と $Q(p')$ は等しいか，交わりを持たないかのいずれかであることは容易に示される．こうしてつくられた各集合から1点を取り出して，それらを集めたものを M とする (このような集合 M を作ることができるというところで，暗黙の了解のうちに選択公理を用いている．この公理の議論に時間を割く前に証明を終わらせよう)．少し考えれば，D^* は Q の変換すべてを M の各点に施して得られる集合に等しいことが分かる．

証明の最後のちょっとした部分は，D^* を A, B, C に直和分解し，A, B, C, $B \cup C$ が互いに合同になるようにすることである．

注意してつくり出した3つの変換の集合 I, J, K を思い出そう．集合 M に対して I の変換すべてを施して得られる点の集合を A とする．同様に J, K を M に施して得られる集合をそれぞれ B, C とする．この A, B, C が求める D^* の直和分解 A, B, C に等しい．fI は $J \cup K$ に等しいので，$f(A)$ は明らかに $B \cup C$ に等しい．f は単に180°の回転であるから，A と $B \cup C$ は合同になるというわけである．同じように考えれば，明らかに $gI = J$ から A と B の合同性が，また $\bar{g}I = K$ から A と C の合同性が導かれる．すると合同性が推移的であることから，$A, B, C, B \cup C$ はすべて互いに合同であることが結論づけられる．

さて，ここで我々は無限への平行移動のトリックを使うことになる．テレビのチャンネル切替器のダイアルのイメージを思い出してほしい．ここではかわりに回転軸が2本ある球体のダイアルを考える．変換 f は1番目の軸のまわりに180°回転させることを示しており，よって集合 A を集合 $B \cup C$ に一致させるには，この軸のまわりにダイアルを1回ひねるだけでよい．同じようにして，2番目の軸に対して120°ひねる (すなわち変換 g) と集合 A と B は重なり，2回ひねれば A は C に重なる．

ここでついに我々はバナッハ・タルスキの定理の構成を完成させるのに必要な分解を直接得る方法を手に入れた．我々のゴールはボールを有限個に切り分けて，それをもう一度貼り付け直し，はじめの大きさと体積の同じボールを2つつくり出すことであった．以前に述べたとおり，我々の出発点はハウ

スドルフのパラドックスである．その考えは次のとおりである．ボールの表面を互いに交わらない 4 つの集合 A, B, C, D に切り分けて，$A, B, C, B \cup C$ がすべて互いに合同になったとするとき，集合 $B \cup C$ は後で 2 つの別個の球面となる集合の組を作るための“型板”として使うことができる．この型板を A の上において，それぞれ B と C に合同になるような集合 A_1, A_2 を切り出す．B と C はともに A に合同だから，A をこの A_1 と A_2 に分解するというのはパラドキシカルである．次に同じようにして B と C を B_1, B_2 と C_1, C_2 に分解する．すなわち S は次のようにして部分集合に分解されるわけである：

$$
\begin{aligned}
S &= A \cup B \cup C \cup D \\
&= (A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cup B_2) \cup (C_1 \cup C_2) \cup D \\
&= (A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D) \cup (A_2 \cup B_2 \cup C_2)
\end{aligned}
$$

$(A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D)$ から 1 個の球面 S_1 をつくれば，これは有限分解により元の球面 S と合同である (このことは A は A_1 に合同，B は B_1 に合同と考えれば分かることである)．あと残されたのは，ほんのささいなことである．というのは $(A_2 \cup B_2 \cup C_2)$ から 2 個目の球面がつくれるだろうか，ということである．

安心したまえ，ここまで来たのだから答がノーであるはずがないのである．まず，$A_2 \cup B_2 \cup C_2$ は 2 つ目の球面 S_2 に“ほとんど”同じものにつくり直すことができる．これは元のものと同じ形であるが，ただ，集合 D だけ省いたもので，すでに指摘したように，この大きさは S に比べてとるにたらない程度である．

球面とそれから集合 D を除いたものが有限分解で同値であることは，円とそれから 1 点を除いたものが有限分解で同値であることの証明と本質的に同じようにして見ることができる．よって $S_2 \setminus D$ と S_2 は有限分解によって同値であり，これで証明は終了である．すなわち球体 S はうまい具合に解体すれば，それを再び組み換えて，2 つの球 S_1 と S_2 で，それぞれが S に有限分解により同値であるものをつくり出せる，ということを証明したわけである．

●応用●

というわけで，我々は1つのバスケットボールを十分注意深く切り刻めば，それを2つにすることができるということを示したわけである．それはスポーツの世界では都合の良いことであるが，では銀行業ではどうであろうか？どんなに少額のものであれ，1枚の紙幣を2枚にできるであろうか？残念ながらそれはできない．数学者A. リンデンバウム (A. Lindenbaum) は，平面上のどんな有界集合もこの逆説的な分解を持ち得ないことを示した[2]．そして悲しむべきことに，紙幣は平面上の有界集合なのである．

球面を球にする“増幅”技術についてはすでに述べた．バナッハ・タルスキの定理を用いて，この2つの複製を作るには選択公理を必要とする．この公理をより直観的に明快な形で述べてみると，空でない集合の集まりがあったとき，それぞれの集合から，1つずつ要素を選び出すことによって，新しい集合をつくり出せる，ということになる．

選択公理の妥当性は，二百年くらいも前にユークリッドの第5公理がそうであったのと同様に，20世紀において数学界で激しく議論された話題である．その問題は1960年代初めについに解決された．この公理の運命は第5公理のときと同じようなもので，真でも偽でもなく，体系の他の公理と独立であったのである．それを真であるとして受け入れれば――そのことはごく自然なことなのであるが――それから導かれるバナッハとタルスキの奇妙な結果を受け入れざるを得ないのである．

理論についてはこれでおしまい．ここで，おもしろい応用実習にに移ってみよう．必要なものは尖ったナイフ，ひとかけらのパン，2, 3匹の魚とたくさんの観衆である．このとき，この記事で示したように切り貼りをしたとすれば，その後，どんなことが起こるであろうか？

---

[2] A. Lindenbaum, Fund. Math. (1926), **8**, p.218.

超集合

ジョン=バーワイズ，ラリー=モス (Jon Barwise, Larry Moss)

●序：超集合とは●

ほんの 2，3 の体験から，私[1] は数学を仕事として選んだように思う．1 つの体験を言うと，ある高校の先生が，次の連分数を見せて，

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} \tag{1}$$

その上，x は黄金比 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ にほかならない，と説得しようとされた．問題なのは,「…」となっている省略部分だが，これは，まるでルシフェル (Lucifer, 天から落ちた傲慢な大天使) の光の帯のように，不可解な分母の中へと，どこまでも落ちてゆく．しかし，別の見方をすると，(1) の解は明確に得られるのだ．すなわち，この連分数をよく見ると次の等式

$$x = 1 + \frac{1}{x} \tag{2}$$

をみたすから，(2) からただちに $x = (1 + \sqrt{5})/2$ が導かれる．

私はまさに，罠にはまったようだった．学生会館監督係りの何期間もの間を連分数をつくっては「解いて」いた．結局，難しい問題でつまずいてしまっ

[1] 解説の都合上，この序章は第 1 著者である J. B. (ジョン=バーワイズ) により，彼流に書かれたので,「思い出にふける」という，年取った著者にありがちなものになった．それ以外の内容については，両方の著者に平等に責任がある．

たが，それで極限の考え方にたどりついたのだと思う．少なくとも，2 年のちに極限を習ったときには，よく分かった．そして最後には，実数を，有理数のコーシー列から作ることも分かった．もっとも，それはかなり後のことだが．

何年か前に，これと同じような経験をした．ピーター=アクツェル (Peter Aczel) の整礎でない集合[2] についての原稿[3]を読んだときだ．

定義 1　集合 b が**超集合** (hyperset) であるとは，ある無限列

$$\cdots \in a_{n+1} \in a_n \in \cdots \in a_1 \in b$$

が存在するときを言う．そうでないとき，b は**整礎** (well-founded) であると言う．

超集合の簡単な例としては，次のものがある．

$$x = \{1, \{1, \{1, \{1, \ldots\}\}\}\} \tag{3}$$

この集合は自分自身を要素として含んでいる．それは (1) の連分数が (2) をみたすのと同じことだ．だから x は超集合である．もし，このような表現に早く出会っていたら，連分数に初めて出会ったときと同じ，めまいがするような体験をしただろう．しかし，連分数を解いたとき感じたような興奮は得られなかっただろう．実際に，連分数のときと同じゲームを，次のものでやってみよう．

$$x = \{1, x\} \tag{4}$$

しかし，これは何を意味するのだろうか？ 集合の定義域がどのようなものであればこの方程式を解くことができるのだろうか？ 私は，このような集合は存在しない，と教わっていた．よく知られた集合論の公理 (次に挙げる基礎の公理) から，このような集合は排除されるのである.「基礎の公理 (The Axiom of Foundation)」(FA)：

---

[2] 「超集合」とアクツェルの「整礎でない集合」は同じものである．超集合という言葉のよい点は，否定的な含みをもっていないことと，超準解析 (non-standard analysis) の超実数を思い起こさせることである．これから見て行くように，類似な性質もある．

[3] この原稿は発展して Aczel [2] となった．整礎でない集合の決定版である．

任意の集合は整礎である．　(FA)

だから，(4) の解を求めることは，望みがないと思えただろう．

● 基礎の公理 (FA) ●

FA は，関係 $\in$ について，集合の無限下降列は存在しないことを述べている．もっと面白く FA を述べることもできる．例えば，ZFC 集合論の構成法の 1 つに，次のような集合族 V_α (α は順序数) がある．これは，V_0 は空集合 $\emptyset$，$V_{\alpha+1}$ は V_α のすべての部分集合の集合，そして α が極限順序数では和集合をとることで定義される．このとき，FA は,「任意の集合はどこかの V_α に入ること」と同値になる．だから FA を仮定すると，任意の集合はこの整列した階層のどこかに位置する．大ざっぱに言って，位置するところが高くなれば，集合として複雑なものになる．FA を認めれば，集合論の宇宙は，十分階層的につくられたものとなる．

集合論の専門家における FA に対する考え方は 2 つに分かれるようだ．1 つは，集合を理解するために必須のもので，基本的な公理という考え方．もう 1 つは，ツェルメロ・フレンケル集合論 (ZFC) の他の公理とは違って,「基礎の公理」は，一般に受け入れられる数学的な原理ではない，実際に数学で集合論を適用するとき用いる原理ではないと考えるもの．この考え方では，FA は単に論理学者の精神衛生に害のないものにすぎない (これらの異なった考え方については，囲み記事「基礎の公理に関するいくつかの引用」を参照).

では，FA が無害であることがどのようにして分かるのだろうか？ いま，FA を仮定しない集合論 (ZFC^- と書かれる) から始めて，すべての整礎な集合全体 WF を考えてみよう．このとき「整礎な集合の集合はまた整礎になる」という性質から，すべての ZFC^- の公理は，WF に相対化して成り立つことが (ZFC^- を用いて) 容易に分かるし，このとき FA も成り立つ．したがって，FA を導入しても，集合論に矛盾がもち込まれることはない．さらに，よく知られた数学的構造 (自然数，有理数，実数など) は，WF の中でモデル化できる．だから，なぜ FA を仮定していけないことがあろうか？

そうであるから，最近まで，FA はわがもの顔であった．理由については一

基礎の公理に関するいくつかの引用

この公理は幾分技巧的であって，技術的理由により公理系に入れられる．

Paul Cohen [10]

集合論の公理に「基礎の公理」(FA) を加える考えは，ミリマノフ (Mirimanoff) [1917–1920] までさかのぼる．彼はこれを，ある変則的な集合を除くための手段として取り入れた．実際に我々の公理では，集合形成の正確なプロセスが公理的に決められているときのみ，集合の概念がつくられる．しかし，これは変則的な集合が存在するという可能性を，除いてはいない．すなわち，普通の数学的な集合形成では，現れないような集合の存在である．だが，いくつかの証明の中では，この可能性はじゃまになる．このような変則的な集合の 1 例は，自分自身を要素としてもつ集合である[1]．

Paul Bernays [9]

そのような集合を排除しようとして，フォン=ノイマン (von Neumann) は「基礎の公理」を導入した．しかしながら，この公理の効果については，さらに検討する必要がある．

Abraham Fraenkel, Bernays [9]
序章

しかしながら，集合が自分自身の要素となりうるという考えは，パラドックスを導く危険性を含んでいる．自分自身の要素となりうる集合の，適当な例を考え出そうとするならば，例えば「すべての集合の集合」といった，ばく然とした抽象的概念の中から取ってこなければならない．．．$M \in M$ は，かなり特異な集合に対して真となる論理式であって，そのような集合も認めるような，集合の概念の広い解釈ができるのかどうかは，明らかでさえない．

James McCawley [16]
pp.142–143

次のことに注意しておこう．すなわち，整礎な集合だけを正式に集合と呼ぶという主張に対して，もし，同意できないとしても，非常に一般的な法則を要求しなければ，整礎でないものも集合に含める主張をさらに進めて行くことはできない．しかし，この非常に一般的な法則はあまり役には立たない．なぜなら，集合論や数学の分野で，整礎でない集合を必要とするところはないからである．したがって，FA を受け入れるのは信仰箇条としてではなく，「集合」という言葉にもっと制限された意味を与えるための約束であって，この約束がなければ，重要な数学的研究が妨げられるためである．

Fraenkel, Bar-Hillel, and Levy [11]

この主張を肯定的に加えるならば，集合 z は，z 以前につくられた集合のみを要

[1] ここの段落は英語を改良するために少し書き換えてある．

素としてもつようになる．[原本の脚注：ここで「以前に」というのは，時間的な意味よりも，論理的な意味に解釈する．例えば「ある定理は，他の定理より以前に証明されてなければならない．」と言うのと同じ意味である．] もちろん，集合の概念をまったく違ったように解析することは可能である．この場合，公理の集合はまた違ったものになりうる．しかし現在まで，ここで与えたものとは本質的に異なる研究で，満足のゆく公理の集合を導くようなものはなされていない．

Joseph Shoenfield [19]

致しなかったが，集合論の専門家の多くは，FA を正しいと仮定することに満足してきた．多くの人にとっても，FA はほとんど信仰のようであった (例えば，Barwise [3] を参照)．しかし最近，その「基礎」がぐらついてきたのである．それは矛盾がでたからではなく,「ほしいと思う集合を認めてもらいたい.」という要求があったからである．その上，新しい的確な集合の概念が考え出されたのである．その集合の宇宙は，いままでの整礎な集合をすべて含み，また (4) のような式が解ける空間も認めるものとなる．そして，すばらしい数学を導き出す．さらに，数学以外の，コンピュータサイエンス，人工知能，哲学，言語学でもすばらしい応用をもつ．超集合により，いろいろな現象のモデル化を，集合論の中で単純で的確になじみ深い方法で行うことができる．実際に，アクツェルの整礎でない集合の研究は，コンピュータサイエンスのある問題から出発している．いわゆる「通信システム」の理論である．この分野の成果を理解して単純化するという目的から，アクツェルは，自分の集合の宇宙を開発して，いわゆる「反基礎の公理」AFA (antifoundation axiom) を定式化したのだった．

10 年前なら，多くの集合論の専門家と同じように，基礎の公理は議論の余地のないもの，と考えたはずだ．しかし，AFA を勉強して使ってみた後では，FA や一般の集合論についての感じが変わってきた．いま，我々は公理が比喩を具体化し，公理を採用することで，数学が特徴づけられることを知っている．FA が意味するものは大切だが，それは同時に制限にもなっている．FA は，便宜や節約のための，ささいな仮定ではない．そして単に，よくでてく

る概念に魅力があるからということでFAを採用するならば，美点が絶対必要な点とされてしまうのである．アクツェルによって，集合の宇宙を明らかにするために，FAは必要ないことが分かった．アクツェルは，普通の集合の宇宙とはまた別に，(4)のような式が解をもつような，すばらしい対象領域が**存在する**ことを示した．数学的には，整礎な集合の宇宙の拡張である．ちょうど実数が有理数の拡張であるように．一方，公理によって，これら2種類の集合の考え方には大きな違いがある．そこで，この記事では，新しい領域とその応用を説明しよう．

また，超集合は，数学の哲学の事例研究としても興味深い．ちょうど無理数や複素数の発見のように，数学的概念を広げて進化させることを見たり，行ったりするよい機会である．読者の皆さんに，この新しい領域は，古典集合論とはまた別に，興味深く，数学的にも哲学的にもすぐれていると分かっていただければ，目的は達成される．

おそらく，超集合はモデルを作るために重要となるだろう．集合について，具体的に表現できることが，大きな利点である．しかしながら，いままでの，整礎な集合について持っていた直観とは違うことは残念で，また避けることができない．だから，大切なのは，数学ではいつもそうだが，公理が何を具体的に言おうとしているか，また公理の背後に，どのような直観があるかに気づくということである．

● 基礎の公理と順序対

数学において集合論が重要とされる点は，構造のない対象の集合に対する集合論本来の興味にあるのではなくて，むしろ，集合を使っていろいろな数学的な構造(数，関数，関係など，また数学的でない構造についても同様である)を数学者が表現できることにある．これらの根本をたどって行けば，順序対の集合を，したがって順序対そのものを表すことに行き着く．集合論で順序対を表せなければ，数学的な興味は，事実上なくなるだろう．

普通には，順序対 $\langle x, y\rangle$ を集合 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ によってモデル化する．ほとんどの目的にとって大切なことは，順序対の定義の条件：$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$

ならば $x = u$, $y = v$ が成り立っていることである．我々の目的に対しては，このとき，対象 x と y が何であっても成り立つことが大切である．例えば，x と y が超集合 $x = \{x, y\}$ でも成り立つ．少し考えれば，この条件の普通の証明では，x や y の性質について何も仮定していないことが分かる．順序対を得られれば，通常どおり，順序 3 項が $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle = \langle x, y, z\rangle$ として，2 項関係が順序対の集合として，関数がある性質をもつ関係として，などと得られる．

順序対と FA の関係をみるためには，次のような超集合の同値な特徴づけが便利である．

定義 2　集合 x が集合 z の**構成要素** (constituent) とは，x が z の要素であるか，または z の要素の要素であるか，または z の要素の要素の要素であるか，... のときを言う．このとき，$x \in^* z$ と書く (すなわち関係 $\in^*$ は関係 $\in$ の推移閉包である).

この定義から，b が超集合であることと，次のような関係 $\in^*$ の列 $\langle a_n : n = 1, 2, \ldots\rangle$ が存在することが同値となる．

$$\cdots \in^* a_{n+1} \in^* a_n \in^* \cdots \in^* a_1 \in^* b$$

(⇒) の証明は自明．一方，(⇐) の証明は，関係 $\in^*$ の中間の下降列を書き出すことで関係 $\in$ についての下降列を得るので明らか．集合 a_n は必ずしも異なっていなくてもよい．例えば，集合 b の構成要素に，構成要素関係の循環があれば，b は超集合となる．

いま FA を使えば，いろいろな数学的な対象について，意外な事実が分かる．ここで後に役立つものを上げておこう．

命題 1　基礎の公理 (FA) を仮定する．

1. 任意の x, y に対して，$x \neq \langle x, y\rangle$ かつ $y \neq \langle x, y\rangle$.

2. 任意の関係 R, S に対して，もしある対象 a が存在して，a と S に R の関係 (記号で書けば aRS) があれば，どんな対象 b についても，b と R に S の関係はない．

証明 これらはすべて，次の単純な事実に着目することで分かる．すなわち，上で述べた順序対の表現では x も y も $\langle x, y \rangle$ の構成要素となっていることである．他に知られている順序対の表現でも，すべてこの性質をもっていて，また，いま考えている命題を証明するために必要なのはこの性質だけである．(2) の証明を記しておこう．いま，矛盾を導くため，aRS かつ bSR としてみよう．すなわち $\langle a, S \rangle \in R$ かつ $\langle b, R \rangle \in S$ である．このとき次の構成要素関係 $\in^*$ の循環がある．

$$S \in^* \langle a, S \rangle \in R \in^* \langle b, R \rangle \in S$$

これらはすべて整礎でない集合 (超集合) となって，FA と矛盾する． □

この命題は，いろいろな循環現象をモデル化するとき，整礎な集合を使おうとすると，FA が問題を引き起こすことを示唆している．いくつかの例を見てみよう．

● 循環現象を集合論でモデル化する

過去 100 年にわたって，いろいろな現象をモデル化する多くの技法が，集合論で開発されてきた．これらの技法は，順序対，関係，関数の表現を基にしている．しかしながら，循環を含む現象にこのような技法を応用するときには，基礎の公理が邪魔をする．この節では，いくつかの例で確かめてみよう．超集合が重要となる場合の感じを，読者につかんでもらうことが目的なので，最も簡単な 2 つの例についてのみ詳しく検討してみよう．

ストリーム この概念はコンピュータサイエンスから来たものだ．直観的に言えば，ストリームは順序対 $s = \langle a, s' \rangle$ であり，第 1 成分は有限の値，第 2 成分はもう 1 つのストリームである．だから，ストリーム上の基本演算としては，第 1 成分を取り出す (有限値を出す) もの，第 2 成分を取り出す (ストリームを出す) ものがある．

ストリームは無限のものだが，生成する計算プログラムは容易に書ける．例えば，

$$f(n) = \langle n,\ f(n+1) \rangle$$

と定義して，このプログラムを走らせれば，ストリーム $\langle 0, \langle 1, \langle 2, \ldots \rangle \rangle \rangle$ が生成され，少なくとも理論家にとっては興味深い，想像上の極限が得られる．

いま A を「アトム」の集合とする．アトムは列や数などを表すとする．いま，第 1 成分が A の要素であるストリーム全体をモデル化したいとする．自然な定義としては，次のようになるだろう．ストリームの集合 $St(A)$ を次の条件をみたす最大の集合とする：「$s \in St(A)$ ならば，ある $a \in A$ と $s' \in St(A)$ に対して $s = \langle a,\ s' \rangle$ となる．」

直観的には，ストリームとなるアトムの無限列全体のことである．しかしながら，次の命題が成り立つ．

命題 2　基礎の公理 (FA) を仮定する．このとき $St(A) = \emptyset$ である．

証明は，命題 1 と同様で，y が $\langle x,\ y \rangle$ の構成要素だから，任意のストリームに，$\in^*$ についての無限下降列が含まれることから分かる．

これは，直観と数学的モデルとの間に，かなり大きな違いがあることを示している．したがって，ストリームを ZFC (基礎の公理をもった集合論) の中でモデル化することは，直観的に自然な方法ではできない．例えば，自然数全体から A への関数として扱うなどの巧妙な手段を使わなければならない．この方法では，ストリームの第 2 成分を取り出す演算を，関数上のシフト操作でモデル化しなければならない．

非階層的データベース　直観的にはデータベースとは，あらゆるものについて述べられた事柄を表現する，ある種の記号構造である．リレーショナルデータベースは,「対象はある関係の中に存在する」という形で事実を表現している．我々の目的では，記号構造は無視することができ，事実それ自体を気にする．バーワイズ一家の事実を表すデータベースを見てみよう．

FatherOf

父	子供
ブラッド	キャシー
ダン	ディヴィッド
ダン	アリサ

MotherOf

母	子供
ナンシー	ブラッド
ジュディス	ディヴィッド
ジュディス	アリサ

BrotherOf

兄弟	兄弟姉妹
ディヴィッド	アリサ

話を簡単にするため，関係はすべて2項関係であって，普通どおり順序対の集合として表されている上のようなデータベースについてのみ注意を向けよう．したがって，データベースモデルとは，定義域が2項関係記号の集合 *Rel* であるような関数 $\mathfrak{M}$ のことで，各 $R \in Rel$ に対して，$R^{\mathfrak{M}}$ は有限の2項関係とする．

いま，調べてみたい基本的な問題は，すぐに記述できて，しかも正しいように見えるが，この定義にあてはめると，データベースモデルをもたないということがあるか，というものである．単純な例を Barwise [7] からとってみよう．

集合 *Rel* は関係記号 **SizeOf** を含まないとし，$Rel' = Rel \cup \{\textbf{SizeOf}\}$ としよう．このとき *Rel′* に対するデータベースモデル $\mathfrak{M}$ が正しいとは，関係 $\textbf{SizeOf}^{\mathfrak{M}}$ がすべての順序対 $\langle n, R \rangle$ からなるときを言う．ただし *R* は $\mathfrak{M}$ の2項関係で *n* は *R* の要素の個数とする．

いま，直観的には，**_Rel_ に対する任意のデータベースは _Rel′_ のデータベースに一意的に拡張される**．例えば，上のデータベースの例を考えると，一般に証明をどのように行えばよいか分かる．

FatherOf

父	子供
ブラッド	キャシー
ダン	ディヴィッド
ダン	アリサ

MotherOf

母	子供
ナンシー	ブラッド
ジュディス	ディヴィッド
ジュディス	アリサ

BrotherOf

兄弟	兄弟姉妹
ディヴィッド	アリサ

SizeOf

2項関係	数
FatherOf	3
MotherOf	3
BrotherOf	1
SizeOf	4

しかし，集合論的なモデルではこのモデルは表現できない．実際に次が成り立つのである．

命題 3　基礎の公理 (FA) を仮定する．このとき正しいデータベースのモデルは存在しない．

証明　いま $\mathfrak{M}$ が正しいと仮定して，*SizeOf* を $\mathfrak{M}$ 内の 2 項関係のサイズ (順序対の個数) を表す 2 項関係で，n を 2 項関係の個数とする．このとき，*SizeOf* のサイズは n である，すなわち n *SizeOf SizeOf* が成り立つ．しかし，このとき，命題 1 の 2 ($R = S = \mathit{SizeOf}$ としたときの) を適用すると矛盾となるので，正しいモデルは存在しない．□

ストリームの場合には，不自然な点をがまんすれば，自然数上の関数としてモデル化して，問題を避けられる．ここでも，同様に問題を避けることはできる．例えば，正しさの定義を変えて，**SizeOf** の解釈 *SizeOf* を解釈の関数ではなく *Rel* **内の関係記号の関数**として考えればよい．この例の場合には，問題ないであろう．この例を含めたのは，主に説明しやすいし，起こりうる問題の感じもつかみやすいからである．この記事の終わりで，循環現象の重要な例を，もう少し述べる．そこで，これらすべての評価について，十分議論しよう．

これまでの否定的な結果を再考する　この節の結果を，FA に依存しない方法で述べてみよう．ストリーム $s \in St(A)$ が**整礎である** (well-founded) とは，s が整礎な集合全体 WF に属すときを言う．同様に，データベースモデル $\mathfrak{M}$ が**階層的である** (hierarchical) とは，それが WF に属すときを言う．このとき，命題 2 と 3 は次のように言い換えられる．

命題 4　(ZFC$^-$ で考えて)

1. 整礎なストリームは存在しない．
2. 階層的なデータベースは存在しない．

このように言うと，別におかしな感じはしない．これらは，単に我々が整礎な構造を使って整礎でない現象をモデル化しようとしていたことを表して

いる．だから，もし，FAを置き換えてうまくゆくものがあれば，求めたい存在が言えるかもしれない．そして実は本当にそうできるのである．

● 反基礎の公理 ●

もちろん，基礎の公理を何かに置き換えず，ただやめても無益である．FAをやめて「超集合が存在しうる」としても十分ではない．もし正しい超集合の存在を示すのならば，他の公理と合わせると存在が示せるような一般的な原理を必要とする．この原理は，集合論の他の公理と矛盾してはならない．

他にも問題がある．普通，外延性の公理は，同じ要素をもつ集合は等しいことを述べているが，$a = \{a\}$ と $b = \{b\}$ についてはどうだろうか？ 集合として等しいのだろうか？ 普通の外延性の公理(同じ要素をもつ集合は等しい)は，この点には答えてくれない．等しいことの明確な基準がないと，超集合はあまり使えない．「集合」という名前も妥当かどうかさえ分からない．

だから，超集合の理論は新しい公理によらねばならない．どのような新しい公理が生まれるだろうか？ 公理とは，重要な現象の本質をとらえたものだ．現実世界や数学の発想の中で，くり返されるパターンを抽出し，正しく本質的なことを述べたい．新しい公理が矛盾(集合論ではときどきあるが)しないだけでは不十分である．パラドックスの「確かな」予防とはなっても，確実に把握した何かに基づいていなければ，生き残れない．興味がなくなって廃れて行くだろう．実際に，基になる直観的な概念がない理論は，廃れていった．

多くの集合論の専門家がFAのない集合論という荒野を探検し，ほとんどは同僚たちにも無視されてきた．例えば，M. ボッファ (M. Boffa)，M. フォルティ (M. Forti)，L. ゴルデエフ (L. Gordeev)，F. ホンセル (F. Honsell) たちがいる．しかし最近，ピーター=アクツェルの研究により，超集合の宇宙を明快に描き出す理論が，論理的に固まってきた．以前の研究が認められなかったのは，多くの提案された公理が，循環現象のモデル化につながるのか，集合の新しい考え方を見つけることになるのか，はっきりしなかったからだろう．

いま，少なくとも2つのまったく違った比喩から，集合の理論をイメージすることができる．1つは，集合とは物の入った「箱」のようなもので，集

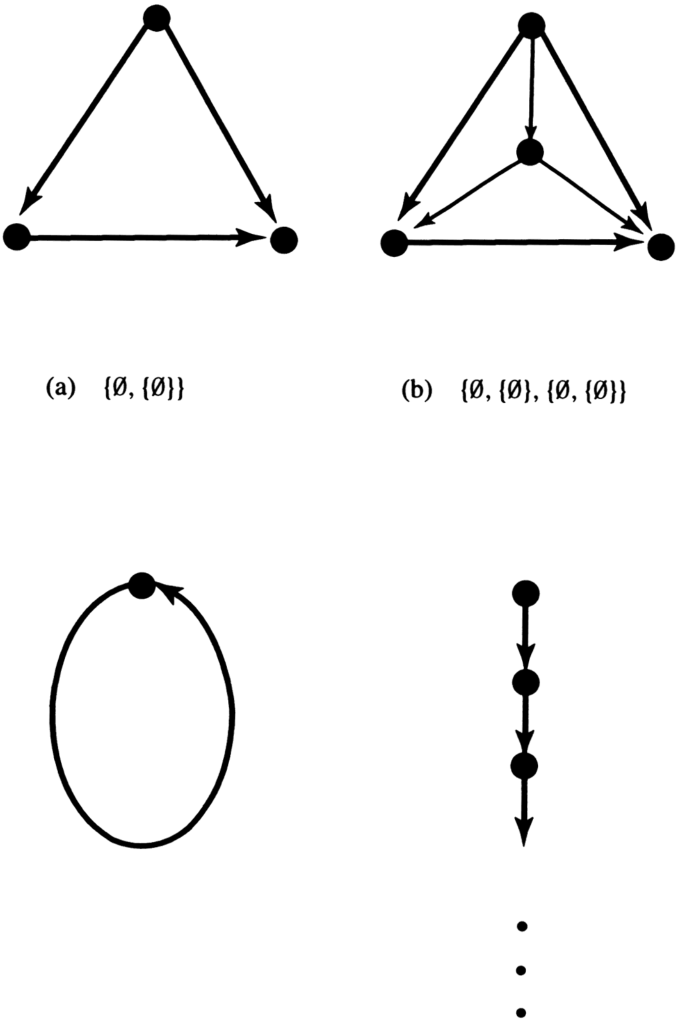
合を形づくるのは，その箱に物を入れること，という比喩である．まったく違ったもう 1 つの比喩では，集合を形づくるのは，**構成部分を忘れる**ことである．構造化された対象 (「構成部分」をもった対象) を考えたとき，特定の構成部分とそれらをつなぐ特定の「接着剤」を忘れてしまう．その残ったものが集合論的な構造である，という比喩である．これらの 2 つの比喩の違いは，次のような質問でも明らかになる.「まず最初に，対象はどこから出て来たものなのですか．そして，対象にはどういうものが考えられるのですか？」

まず，箱についての比喩は，基礎の公理から，つまり累積的な階層から考え出されたものである．あるアトム (最小構成要素) の集合から始めて，その部分集合全体を作る．これはまた，集合を作るための，新しい物の集まり与えている．またその部分集合全体を作る．以下同様に考える．この方法で得られた集合は，整礎になる．なぜなら，整礎な集合の集合はまた整礎だからである．

次に，構成部分を忘れる比喩は，対照的に，カテゴリー理論の「忘却ファンクター」に影響されている．また集合として超集合を認めるという含みもある．まず，任意の集合 b は，整礎であろうとなかろうと，有向グラフの構造をもった対象で表されることを注意する．節点としては，b とそのすべての構成要素を考える．節点 x から y への辺 $x \longrightarrow y$ としては，$x \in y$ のときすべてを考える．このグラフは，到達可能原点指定グラフ (accessible pointed graph)，略して apg と呼ばれる.「原点」とは，指定された点 b のことを言う．すべての節点が，この原点から到達可能になっている．

図 1 は，4 つの集合とそれらが決定する apg を図示している．どの場合も apg の指定された原点は 1 番上の点である．いま，図 1 の (a) と (b) を考えてみよう．図 1(a) では {Ø, {Ø}} による apg が示されている．この集合は自然数 2 を (フォン=ノイマン順序数として) 表している．図 1(b) は自然数 3 の apg を表す．

忘却ファンクターの比喩は，集合を，このような有向グラフから，節点の性質を忘れることで抽出されるものと考える．すなわち，有向グラフで，節点の性質を忘れ去って，各節点 n に集合 $d(n)$ を次のように対応づけることを考える．



(a)　{∅, {∅}}

(b)　{∅, {∅}, {∅, {∅}}}

(c)　Ω = {Ω}

(d)　Ω　再び

図 1

$$d(n) = \{\, d(m) \mid n \longrightarrow m \,\} \tag{5}$$

ここで「$n \longrightarrow m$」は「n は m の親である」と言う．

アクツェルは少し違って，絵で描写する比喩で表現した．この比喩では，集合とは，到達可能原点指定グラフで表される構造であり，各節点に，それが表す集合を対応させる関数は (5) をみたすものと考える．以上のことから，次のように AFA (反基礎の公理) を定式化することにしよう．

定義 3　(ZFC$^-$ で考えて)

1. **有向グラフ** (directed graph) $\langle\, G, \to \,\rangle$ は**節点** (node) と呼ばれる対象の集合と，節点の順序対の集合 $\to$ とから成る．この順序対は**辺** (edge) と言う．

2. **到達可能原点指定グラフ** (accessible pointed graph, apg) $\langle\, G, \to, p \,\rangle$ は有向グラフと指定された節点 p から成り，各節点は p から有限の経路で到達できるものである．

3. 有向グラフ G の**装飾** (decoration) とは，定義域が節点全体の集合で，式 (5) をみたす集合値関数 d のことを言う．

4. ある apg $G = \langle\, G, \to, p \,\rangle$ が集合 b を**描写する**とは，このグラフの装飾 d で $d(p) = b$ となるものがあるときを言う．すなわち，b が最も上の点を装飾する集合となっているときである．

定義 3 の前で述べたが，任意の集合 b に対し，ある apg をつくって b を描写するようにはできる．問題なのは逆で，どんな apg が集合を描写するのだろうか？

いま，任意の整礎な apg (無限下降連鎖をもたない apg) が描写する集合については，唯ひとつ存在することが，ZFC$^-$ で証明できる．さらにもし，FA を仮定したとき，集合を描写できるのは，整礎な apg のみであることも証明できる．なぜなら，apg 内の無限下降連鎖は関係 $\in$ に対する無限下降列を導くからである．それゆえ FA を仮定すると，集合を描写する apg は整礎な apg である．

アクツェルが提案したのは，任意のapgによって描写されたものを，集合と考えよう，ということである．このことから，反基礎の公理AFA (Antifoundation Axiom) を次のように述べよう．

任意の apg に対して，それが描写する集合が唯ひとつ存在する．　(AFA)

これは動機となったもとの直観に近い形で述べたものだが，この公理と同値な述べ方はいろいろある．例えば,「任意の有向グラフに対する装飾が唯ひとつ存在する」あるいは，この先で述べるような，解の補題 (Solution Lemma) と呼ばれるものもある．これは，超集合についての結果を示すために有効に使われる．

最も単純な超集合は Ω と書かれて，$\Omega = \{\Omega\}$ をみたすものである．これは図 1(c) に描かれている．このとき，各節点が 1 つの子節点をもつような任意の apg は，Ω として描写されることに注意しよう．

AFA には存在性と一意性の 2 つの側面がある．存在性により多くの超集合が与えられ，一意性により集合の一致の問題が解ける．例えば，集合 $a = \{a\}$ と $b = \{b\}$ について考えてみよう．これらはどちらも図 1(c) に描かれた最も単純な巡回グラフで描写される．しかし，AFA によればこのような集合は唯ひとつ存在するので，$a = b = \Omega$ となる．一般に，AFA は，グラフによって描写される集合が，完全に決定されることを述べている．すなわち，等しいかもしれない集合が本当に等しいか確かめる効果がある．これは，AFA を使った数学的なモデル化に便利である．なぜなら，相異なる対象に対して，何をもって，本当に違うと言えるのかが，はっきりするからである．

AFA の無矛盾性　すでに見たことだが (囲み記事「超集合に矛盾は潜んでいないか？」を参照)，超集合からは「明らかな」パラドックスは起こらない．しかし，AFA で保証された集合がちゃんと論理的なものであり，矛盾は起こり得ないことを，どうやって確かめればよいだろうか？ この問題に答えるということは，ZFC^- のすべての公理および AFA が真となる領域をどのようにして作るかということを示すことである．それで，ZFC^- に AFA が加わった体系が無矛盾であることが分かるであろう．

もちろん，有名なゲーデルの不完全性定理により，無矛盾性を無条件に示す

超集合に矛盾は潜んでいないか？

整礎でない集合(超集合)の話のときにはきまって，次のような質問がでる.「ラッセルのパラドックスや，自己所属 (self-membership) の他のパラドックスはどうなりますか？基礎の公理はパラドックスを避けるために入れたのではないのですか？超集合を認めれば，またパラドックスが生じてしまうのではないでしょうか？」

これは，よくある考え違いだ．つまり，超集合がパラドックスと何か関係があると思ってしまうものだ．このように思いやすいのは，いくつかの理由が考えられる．例えば，$x = \{1, x\}$ のような単なる自己所属集合を考えないで，すぐに,「すべての集合の集合」のような「ラッセル集合」だけを考えてしまう．また例えば(さらに重要だが)，パラドックスでショックをうけた人にとって，FA によって導かれる秩序だった世界が，心やすまる楽園のように思える．せっかく，秩序なき世界から現れた秩序なのだから，この世界を手放すという考えには，自然と疑い深くなるはずである．なぜなら，秩序なき世界がまた生じることになるのだから．

だが，ためらう必要はない．自己所属性をもつ集合の自然な例は，ちゃんと存在する．なじめばなじむほど自然に見えてくる．ラッセルのパラドックスをよく見ると，整礎でない集合がパラドックスを導くという意味ではまったくないことが分かる．次のように考えてみよう．

いま，集合 b が任意に与えられたとしよう．b は整礎でも，整礎でなくてもよい．分出公理から，任意の性質をみたす x で，$x \in b$ であるもの全体は b の部分集合をなすことが分かる．特に，ラッセル集合 $z_b = \{x \in b \mid x \notin x\}$ はそうである．ラッセルの主張は，単に，$z_b \notin b$ ということにすぎない．なぜなら，もし $z_b \in b$ ならば，$z_b \in z_b$ と $z_b \notin z_b$ が同値になり，矛盾するからである．

次の表は整礎でない集合 b いくつかに対して，z_b を計算したものである．最後の行のものは，整礎でない集合だが，整礎な集合と同じく $z_b = b$ という性質をもっていることに注意しよう．

b	$z_b = \{x \in b \mid x \notin x\}$
$\Omega = \{\Omega\}$	$\emptyset$
$b = \{1, b\}$	$\{1\}$
$b = \{0, \{1, b\}\}$	$b = \{0, \{1, b\}\}$

いま，$z_b \notin b$ から多くの結果が導かれる．例えば，自分の部分集合すべてを自分の要素としてもつような集合はない．なぜなら，z_b は b の部分集合だが，$z_b \notin b$ だから．また，すべての集合の集合は存在しない．なぜなら，それは自分の部分集合をすべて自分の要素としてもつからである．同じく，整礎な集合全体 WF は集合ではなく，本来のクラスである．なぜなら，WF は自分の部分集合すべてを自分の要素としてもつからである．しかし，これらの結果は超集合の論理性については何も言ってはいない．

ラッセルの構成について楽しんでみた

い読者は，集合 b に対して集合 $w_b = \{x \in b \mid x \not\in^* x\}$ と $v_b = \{x \in^* b \mid x \not\in^* x\}$ を考えてみるとよい．ただし，$\in^*$ は定義 2 の構成要素関係である．集合 w_b，v_b，z_b の関係は？ 実際に上の表の b について，w_b と v_b を計算してみるとよい．

集合論のパラドックスによれば，完成された集合と，いわゆる本来のクラスとを，区別しなければならない．本来のクラスは，あまりに大きすぎて，完成された集合でなく，集合としては扱えないような集まりである．もっと言えば，特定の完成された集合としては扱えないような集まりを表現したものである．

超集合について言えば，ラッセル集合の構成からは，矛盾は導かれない．しかしこれは，超集合の理論が無矛盾で，役に立つものなのか，積極的に示してはいない．だが実際には，無矛盾かつ役立つものであることが示される．

ということはできない．ある程度の強さをもった数学の理論は自分自身の無矛盾性を，その理論の中で証明することはできない．しかし，相対的な無矛盾性を示すことはできる．つまり，ZFC$^-$ が無矛盾と仮定したとき，AFA を加えた体系も無矛盾であることを示すことができる．実際には，ここでの証明は，さらにもう少し多くのことも示す．すなわち，集合の領域 W で ZFC$^-$ をみたすものを任意にとったとき，それをある標準的な方法で拡張して，ZFC$^-$ + AFA のすべてをみたす領域 V を作る方法を示す[4]．

ここでは，証明の概略のみを述べよう．基本的なアイデアは，実数のモデルを，有理数のコーシー列の同値類として作るのと同じである．ここでは，列のかわりに，apg とその同値類を使う．いま，2 つの apg $\langle G_1, \to_1, p_1 \rangle$ と $\langle G_2, \to_2, p_2 \rangle$ の間の**双方向シミュレーション**とは，関係 $R \subseteq G_1 \times G_2$ で以下の条件をみたすものを言う．

1. $p_1 R p_2$.
2. xRy ならば，
   - 各 $x_0 \longleftarrow_1 x$ に対して，ある $y_0 \longleftarrow_2 y$ が存在して，$x_0 R y_0$ となっている．

[4] この結果は，整礎な集合のみについて述べている定理に対して，AFA からは，何も新しいものはでてこないことも示している．

- 各 $y_0 \longleftarrow_2 y$ に対して，ある $x_0 \longleftarrow_1 x$ が存在して，$x_0 R y_0$ となっている．

2 つの apg が双方向に相似 ($G_1 \sim G_2$ と書く) であるとは，それらの間に双方向シミュレーションが存在するときを言う．例えば図 1(c) と図 1(d) は双方向に相似であり，双方向シミュレーションは (c) での唯ひとつの点と (d) での各点とを関係づけている．

次の性質は ZFC^- のみを用いて容易に確かめられる．

1. 関係 $G_1 \sim G_2$ は apg 上の同値関係である．

2. $G_1 \sim G_2$ ならば G_1 と G_2 は同じ集合を (もし存在すれば) 描写する．

いま，W から V を作る基本的なアイデアは，apg $G \in W$ の関係 $\sim$ についての同値類 $[G]$ を使って，集合のモデルとしようということである．関係 $\in$ は次の方法で自然に定義される．つまり，$[H] \in [G]$ とは，ある節点 n で G の最上節点の子供となっているものが存在して，$H \sim G_n$ をみたすときとする．ただし，G_n は G のちょうど n から上を切り取って得られる apg である．この構成では，結果的に 2 つの apg が等しいということは，その 2 つが同じ集合を描写していることで定められていることになる．もちろん，この得られた構造で，すべての公理が成り立つことを確かめなければならない．W を V へ同形に埋め込むために，任意の集合 b から，標準的な方法 (以前に述べたように) でつくったグラフ G_b への対応を考え，さらに $[G_b]$ への対応を考える．

このつくり方は，AFA の無矛盾性を示すことより多くのことも述べている．ある意味で，AFA の集合は，集合論の宇宙の圏で「終対象」となることを示している．しかし，ここでは詳しくは述べない．証明についての詳細や歴史的な注釈については，Aczel［2］を参照してほしい．

解の補題　先に AFA の述べ方にはいろいろあることを述べた．その 1 つに，応用上最も役に立つ解の補題というものがある．例えば，次のような方程式系に解があることを言いたい．

$$\begin{aligned} x &= \{x,\ y\} \\ y &= \{2,\ 3,\ y,\ z\} \\ z &= \{x,\ y,\ \Omega\} \end{aligned}$$

解の補題の直観的な内容は，超集合の宇宙にこのような方程式系の解がある，というものである．いま，この結果を述べるために，$\wp X$ を X のベキ集合 (すべての部分集合の集合) としよう．

補題 5 (解の補題) AFA を仮定し，X を任意の集合，b を X から $\wp X$ への関数，c を定義域が X の関数とする．このとき，次が成り立つような，定義域が X の関数 d が唯ひとつ存在する．すなわち，すべての $x \in X$ に対して

$$d(x) = \{\, d(y)\ :\ y \in b(x)\,\} \cup c(x).$$

実際には，この解の補題は AFA と同値である．もし，ZFC$^-$ と解の補題を仮定すると，AFA が導かれる (これはよい練習問題だろう)．簡単な例として，上で述べた方程式系を解の補題を使って解くために，X を 3 点集合 $\{x,\ y,\ z\}$ とし，$b(x) = \{x,\ y\}$，$b(y) = \{y,\ z\}$，$b(z) = \{x,\ y\}$ で，$c(x) = \emptyset$，$c(y) = \{2,\ 3\}$，$c(z) = \{\Omega\} = \Omega$ としてみよう．このとき，解の補題を使えば集合 $d(x)$，$d(y)$，$d(z)$ でこの方程式系の解が与えられる．また，このような方程式系の解は常に一意的であることも言える．

また，集合 A に対するストリームの集合 $St(A)$ を見てみよう．FA のもとでは，この集合は空であることはすでに見た．解の補題を使えば，任意のアトムの列 a_1, a_2, a_3, ... に対して，ストリーム $\langle a_1, \langle a_2, \langle a_3, \ldots \rangle\rangle\rangle$ の存在を示すことができる．これは，次のような方程式系を考えればよい．

$$\begin{aligned} x_0 &= \langle a_1,\ x_1 \rangle \\ x_1 &= \langle a_2,\ x_2 \rangle \\ x_2 &= \langle a_3,\ x_3 \rangle \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

(この定義に対して，解の補題が直接適用できるように変更することは，読者におまかせしよう.) もしこの方程式の集合が解をもてば，x_0 に割り当てられ

たものが，明らかに求めるストリームである．

次に，データベースについての例について思い出そう．いま，Rel を 2 項関係記号の有限集合とし，$R \mapsto R^{\mathfrak{M}}$ を，Rel の要素に対して，2 項関係を割り当てたものとする．**SizeOf** を新しい関係記号とする．いま，次の x の方程式を考えてみよう．

$$x = \{ \langle R^{\mathfrak{M}},\ |R^{\mathfrak{M}}| \rangle\ :\ R \in Rel \} \cup \{ \langle x,\ |Rel| + 1 \rangle \}$$

ただし，たて棒 | | は集合の要素の個数を表す．このとき，モデル $\mathfrak{M}$ を矛盾なく拡張して，$\mathbf{SizeOf}^{\mathfrak{M}}$ を，この方程式の解と考えることができるのである．

しかし，次の点には注意しなければならない．つまり AFA は魔法のように，集合についてのすべての方程式に解がある，ということを主張するものではないという点である．方程式を解くには，解の補題で与えられた形にあてはめなければならない．例えば，カントルの定理がある．これは，ZFC$^-$ のみで証明されるもので，自分自身のベキ集合を含んだ集合は存在しないという命題である．このことから，方程式 $x = \wp x$ は ZFC$^-$ にどんな公理を付け加えても解けない．この点は，ある連分数は実数値に収束しない，ということと似ている．

同じように，ちょっと期待はずれだが，AFA を使って，自分の上の関数空間と等しくなるような位相空間で自明でないものを作ることはできない．いま，Ω は $X = X^X$ の解ではある．しかし，AFA は，解としてこれのみを与える．すなわち，アクツェルによって，次のような強い結果が得られている．

命題 6　AFA を仮定する．このとき $X \subseteq X^X$ とすると，$X = \emptyset$ か $X = \Omega$ かのどちらか一方が成り立つ．

証明　$X \subseteq X^X$ とし，$X \neq \emptyset$ としよう．このとき，次の方程式系を考えてみよう．

$$x = \{ \langle y,\ y(x) \rangle\ :\ y \in X \}$$

ここで，各 $x \in X$ に対して，1 つの方程式を得る．解の補題から，この方程式系が唯ひとつの解をもつ．しかし，定数関数 Ω は解である．だからそれが唯ひとつの解．したがって，任意の $y \in X$ は Ω である．よって $X = \{\Omega\} = \Omega$

である. □

● 整礎な集合の極限としての超集合 ●

この記事の最初で, 連分数と整礎でない集合の類比を述べたが, それが述べているのは, 次のような集合

$$x = \{1, \{1, \{1, \{1, \ldots\}\}\}\} \tag{6}$$

を次の整礎な集合の極限として考えるということである.

$$\{1\},\ \{1, \{1\}\},\ \{1, \{1, \{1\}\}\},\ \{1, \{1, \{1, \{1\}\}\}\} \ldots \tag{7}$$

直観的にはこの集合の列は先に行けば行くほど, 集合 x と区別がしにくくなる.

多くの人がこの方向で研究を行った. 任意の集合 x はある apg G によって描写される. いま関係ある apg を考えるため, G は巡回を含まないとする (無限の道は含まれてもよい). だから, G は「木」(tree) とする. 基本的なアイデアは, この木が有限の部分木 (だからもちろん整礎) の「極限」となっているだろう, ということである. この節の最初に出した集合 x は, 整礎な木によって描写された集合族の極限となるはずだ. だから, 超集合を WF からの集合の極限として考えるために, 木の収束という概念を必要とする. 自然な「極限」の概念のもとで, すべての超集合をこの方法で得ることができる. しかし, この意味での極限は唯ひとつに定まらないし, 整礎な宇宙のすべての木に対する極限を考えれば, 超集合の宇宙よりも大きな集まりとなってしまう.

この研究の 1 つの方向としては,「部分的な集合 (partial set)」の違った型をいろいろ導入するというものがある. これはほとんど集合に近いものだが, 完全に特徴づけられたものではない. 部分的な集合のいろいろ違った概念が現れて, それぞれ違った直観に基づいて, 可能な集合を考えている. AFA 上で行ったように, この研究は興味深い数学を導き出している.

終わりに：数学の題材はどこから来るものなのか？

何千年も哲学者は，数学の対象となるものの源，あるいは発祥といったものに興味をもってきた．これはともすれば，難しく考えがちになる問題である．

上で明らかにしようとしたように，数学的には，我々は現実主義者である．つまり，数学を現実の題材についての研究と考える．数やその他の例は，実在するものである．集合もそうである．数学の題材についての感覚を述べることは，難問であって，純粋プラトン哲学と形式主義との間で，進退きわまってしまいそうだ．純粋プラトン主義者は，数学の対象の世界は，人間とは関係なく，経験の世界からも切り離して考える，という立場をとる．したがって，物質世界や人間世界への数学の応用という点については，少し難しく,「理想的な形に関係する」かどうかの問題となる．一方，形式主義者は，数学の対象物がまったくない世界に立っているかのようだ．あるのは，意味をもたない記号のみである．数学の応用性については，もっと不可解である．

最近の超集合とその理論の研究における感動的な側面の 1 つには，この研究が，昔からある数学の題材についての論争の事例研究となっていることである．実際に発展しているこの歴史に対しては，プラトン哲学も形式主義も適当な考察を与えていないように思う．実際この発展は，我々がプラトン主義者ではなく，どれだけ現実主義的であるかを，示していると言えよう．

超集合はどこから来たのであろうか？ いろいろ混じり合ったところからである．例えば，コンピュータサイエンス，認知科学，哲学の分野では，現実世界の重要な現象をモデル化する道具として使いたいので，超集合がでてきた．もちろん，現実世界の数学的なモデル化によって，理解の質を良くすることが，科学の基である．しかし，数学にとって，もっと大切なのは，その逆の面である．すなわち，そんなモデルをつくらなければいけない，という必要性が，新しい形式に光を当てて，数学の世界に仲間入りさせ，数学を豊かにする．これこそ，ここで行おうとする主目的なのである．

これとは別の，数学的なアイデアのもっと捉えがたい源となるのは，例えば,「比喩」,「好み」,「類推」といった，数学者が (一般の人がどう思おうとも，結局，我々も人間だ)，数学上の経験というものである．この側面を無視したり，ないようなふりをするのは簡単だが，そうすれば，数学に対する動機や

人間性のほとんどが失われてしまう．この事例研究では，この側面を無視すれば，従来の集合論の性質は，あいまいなままとなるだろう．さて，もっとつっこんで,「比喩」の問題から考えてみよう．集合の累積的な概念は，ある比喩に深く根付いている．その比喩は，我々を導いてはくれるが，集合論のすべての問題を簡単に片づけてくれるわけではないことは認めなければならない．そしてそれが，唯ひとつの比喩というのではない．超集合は別の比喩に基づいていて，いままでとは違った集合の概念を生み出したのである．

「好み」の問題，もまた起こってくる．累積的な世界で満足している集合論の専門家もいれば，用途の広い,「解の補題」を魅力的に思う専門家もいる(カテゴリー理論の専門家は，多かれ少なかれ，集合論からはずれているように思える)．どちらを選択するかは好みの問題と，便利さの問題の両方である．

最後に,「類推」の問題がある．類推は，数学の発展に対して，大きな役割をはたしている．ある領域で，ものごとがどうなっているかを見て，他の領域でも同じようになるかやってみることだ．超集合の場合には，例えば，有理数，実数，複素数のような，いろいろな数の体系の類推となっている．数の体系では，それぞれが，前のものの拡張になっている．拡張によって，よい性質はある程度失われる．例えば複素数にはうまい順序づけがない．しかし一方では，以前には解けなかった方程式が解けるように，空間を拡げている．だから，その類推で，いままでは解けなかった現実世界の問題が解けるようになる．同様に，無限小解析の超実数は,「実の」解をもたないような，ある方程式系や不等式系が解をもつように実数を拡張しているのである[5]．

数の体系の拡張と，集合論の拡張が共通している点は，拡張によって，もとの要素は失われないが，興味深い方程式系が，解けるようになることである．集合論の拡張を作る場合，良い階層をなすという性質[6]はなくなり，かわりに集合は，apg により描写されたものになる．この方法で，新しい方程式が解け，新しい現象のモデルとなるような集合が得られる．ちょうど実数が

---

5 例えば，Keisler［14］の内容を参照．

6 実際には，両方の見方を同時にする方法がある．選択公理を使えば，任意の apg は，ある apg で，各節点が整礎 (すなわち順序数) であるようなものと同形にできる．だから，apg は段階をおってつくられて行き，すべての段階が終わったときに，完成されたことになり，そして集合としては，装飾として現れるもの，という見方ができる．

有理数のコーシー列の同値類としてモデル化されるように，超集合は apg の同値類としてモデル化される．どちらの場合も，その構成方法から，存在論的な疑わしさはない，と言えるだろう．

この類推は，社会学的な次元へも拡張できる．昔，$\sqrt{2}$ や i がかなり疑われていて，憎しみさえ持たれていたときもある．いまでは慎重な学生を教えるとき以外には 2 度とそんなことは考えない．もっと近くで言うと，無限小の発見は，他のことでは分別あるような人からも，いくらか悪口をいわれた．同じように，Ω のような集合や，ストリーム $\langle 0, \langle 1, \langle 2, \ldots \rangle\rangle\rangle$ は，いままで実体のないものと見られていた．いまでは理解が進み，集合のより豊かな概念のもとで，確実な集合として考えられてきている．

我々著者 2 人は，超集合の応用がもっと見つかれば，日常の数学で使われるようになる，と感じている．20 年もたてば，集合論の入門書は超集合の章を設けなければならなくなるだろう．超集合は，無理数と同じように「無理なもの」ではないし，虚数と同じように「虚なもの」ではない．超集合の宇宙は，たいへん便利で，それにもまして，実におもしろい数学ができる，魅力的なものである．

● 文献に関しての注意

整礎でない集合については，アクツェルの本［2］で，詳しく研究されている．この本では，それまでの文献や議論についても，詳しく述べられている．もっと初等的な紹介は［8］の 3 章にある．超集合の最近の「理論」については［5］の 12 章，超集合の近似理論については［1］と［17］にある．

一般的な議論として，集合の 2 種類の比喩，また循環現象のモデル化での，整礎でない集合 (超集合) の必要性は，［5］の 8 章にある．

現在，超集合の応用を手がけたばかりであるが，将来はもっと多くの応用が現れるのを期待している．ここで，いくつかを見てみよう．

- 並列性の理論：［2］の 7 章．
  これはコンピュータを通して，お互いが通信を行うプロセスの数学的なモデルであり，大きな並列計算機が小さな部分から構成される，と

いうことからでてきたものである．双方向シミュレーションの概念は，この分野では最初に，パーク (Park) の研究に現れたが，それ以前の集合論やモデルの理論についての文献にもある．

- データベースの理論：[6]．
- 意味論的なパラドックス：[8]．意味論的なパラドックスには，うそつきのパラドックス(「この文はうそである.」)や，リシャールのパラドックス(「最初の定義できない数」)が含まれる．集合論的なパラドックスと同様に，意味論的なパラドックスにも，循環性が含まれるように思える．現在，普通には，考えている世界に，ある種の階層をもたせて，循環性は見かけだけと考えるように扱っている．対照的に,[8] は循環性は本来のものであり，AFA のような数学的な道具を使ってモデル化すれば，論理的に理解できる，という考えを出している．
- 共通知識の理論：[5] の 9 章．ある 2 人が，競売で何かを手に入れようと競うとしよう．それぞれが内緒に手に入れようとしたときとは，違った行動をとるはずだ．なぜなら，もう一方の人が状況をすべて知っているということを各々が知っているのだから．共通知識の解析は，言語哲学において，議論や問題となるものである．
- 理論および計算言語学：Barwise [5] と Rounds [18]．

● 参考文献

[1] Samson Abramsky , Topological aspects of non-well-founded sets, to appear.

[2] Peter Aczel , *Non-well-founded Sets*, CSLI Lecture Notes, Chicago: University of Chicago Press (1988).

[3] Jon Barwise , *Admissible Sets and Structures*, New York: Springer-Verlag (1975).

[4] Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam: North-Holland (1977).

[5] Jon Barwise , *The Situation in Logic*, CSLI Lecture Notes, Chicago: University of Chicago Press (1989).

[6] Jon Barwise , rewiew of [12] , *Journal of Symbolic Logic* 54 (June, 1989).

[7] Jon Barwise , Consistency and logic consequence, *Truth or Consequences*, Dunn and Gupta, eds., Dordrecht: Kluwer Achademic Publishers (1990).

[8] Jon Barwise and John Etchemendy , *The Liar: An Essay on Truth and Circularity*, New York: Oxford University Press (1987). (J. バーワイズ・J. エチェメンディ著『うそつき—真理と循環をめぐる論考』金子洋之訳，産業図書)

[9] Paul Bernays , *Axiomatic Set Theory*, Amsterdam: North-Holland (1958).

[10] Paul Cohen , *Set Theory and The Continuum Hypothesis*, New York: W. A. Benjamin (1966). (P. J. コーヘン著『連続体仮説』近藤基吉，坂井秀寿，沢口昭聿訳，東京図書)

[11] Abraham A. Fraenkel , Yehoshua Bar-Hillel , and Azriel Levy , *Foundation of Set Theory*, Amsterdam: North-Holland (1973).

[12] Barry Jacobs , *Applied Database Logic I*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1985).

[13] Mark Johnson , *Attribute-Valued Logic and the Theory of Grammar*, CSLI Lecture Notes, Chicago: University of Chicago Press (1988).

[14] H. Jerome Keisler , *Elementary Calculus*, Boston: Prindle, Weber and Shmidt (1976).

[15] Kenneth Kunen , *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Amsterdam: North-Holland (1980).

[16] James D. McCawley , *Everything Linguists Want to Know about Logic but are Afraid to Ask*, Chicago: University of Chicago Press (1981).

[17] Michael W. Mislove , Lawlence S. Moss and Frank J. Oles , Non-well-founded sets modeled as ideal fixed points, *Information and Computation*, 93 (July 1991) 16–54.

[18] William C. Rounds , Complex objects and morphisms I. A set-theoretic semantics, *Situation Theory and its Applications II*, Barwise, Gawron, Plotokin and Tutiya, eds, CSLI Lecture Notes, Chicago: University of Chicago Press (1992).

[19] Joseph Shoenfield , Axioms of set theory, in [4] , 322–344.

第IV部

展　　望

ブルバキの無知

A. R. D. マサイアス (A. R. D. Mathias)

数学の歴史には，新しいアイデアを競争しながら，急速に発展させていく時代と，それまで流行していたアイデアが不正確で，非整合的で，矛盾さえしているかもしれないと気がつく時代がある．後者のような時代には，過去の成果に，しっかりとした基盤を与えることが要求される．

いま「数学の歴史」という言い方をした．しかし，数学というのは複雑な社会学的生命体で，異なった分野，異なった国，あるいは異なった大学で，異なったやり方，異なった速度で成長していく．ときには，ある国の数学者たちが，自国の数学は遅れていると感じることもある．ハーディ (G. H. Hardy) は,『純粋数学』の新版につけられた「序文」で，そうした感情を表現している．そこでは，20 世紀初頭のイギリス数学界が閉鎖的で，19 世紀フランス数学の成果を取り入れようとしないのに抗して，この本は書かれたと述べられている．

実際 1910 年に，フランスはルジャンドル (Adrien Marie Legendre)，ラプラス (Pierre Simon Laplace)，ラグランジュ (J. L. Lagrange)，フーリエ (Jean-Baptiste-Joseph Fourier)，コーシー (A. L. Cauchy), ガロア (Évariste Galois),

* この論文は，1986 年 10 月 29 日にケンブリッジ大学クインティックス・カレッジでの学部学生数学協会で読まれ，ケンブリッジの学部学生雑誌である *Eureka* に 1987 年に掲載された．現在の改訂版は，ピーター=スウィナートン=ダイアー (Peter Swinnerton-Dyer) 卿，マイケル=バー (M. Bar) 教授，ソーンダース=マックレーン教授，フランシスコ=コレラ (Francisco Corella) 博士，パオロ=マンコス (Paolo Mancosu) 博士，ジェラール=ブリコーニュ (Gérald Bricogne) 博士らからの有益な批評を参考にして作成された．

アダマール (J. S. Hadmard)，ポアンカレ (H. Poincaré) といった数学者の系譜を誇ることができた．彼らはすべて最高の数学者であり，これはまさに圧巻といえるだろう．

しかし，第1次世界大戦後，フランスでの感じ方には変化が生じた．当時の若いフランスの数学者たちは，数学研究の灯はドイツに渡ってしまった，と考え始めたのである．ドイツには，リーマン (Bernhard Riemann)，フロベニウス (F. G. Frobenius)，デデキント (Julius Wilhelm Dedekind)，クンマー (Ernst Eduard Kummer), クロネッカー (Leopold Kronecker), ミンコフスキ (Hermann Minkowski)，カントル (G. Cantor) の遺産を受けつぐ多くの優れた数学者がいた．クライン (Ferix Klein)，ヒルベルト (D. Hilbert)，ワイル (Hermann Weyl)，アルティン (E. Artin)，ネーター (E. Noether), ランダウ (E. G. H. Landau)，ハウスドルフ (F. Hausdorff) などである．これに対し，フランスの数学は衰退に向かっていると感じられたのであった．

そこで 1935 年，フランスの若い数学者のグループ[1]が，自分たちの学問に規律を取り戻すため，ニコラ=ブルバキ (Nicolas Bourbaki) という共同の偽名で，教科書のシリーズを書こうと思い立った．これは，彼らが純粋数学で最も重要であるとみなした分野について，最高のフランス流厳密さで，決定的な記述を与えようとしたものである．

当時，数学的厳密さという問題は，非常に時宜にかなったものだった．なぜなら，フレーゲ (F. L. G. Frege) が提案したクラスの理論に内在する重大な欠陥をラッセル (B. Russel) が見つけたことにより，20 世紀初頭には並々ならぬ混乱が生じていたからである．フレーゲは，任意の性質 $\Phi(y)$ に対して，性質 Φ を持つすべての対象 y からなるクラス $\{y \mid \Phi(y)\}$ が形成可能であり，なおかつ任意のクラスは，それ自身がクラスに属するか否かを判定できる対象であると考えようとした.「a が b のメンバーである」を "$a \in b$"，「a は b

[1] 文献［M7］でのインタヴューでシュバレーが挙げているところによれば，H. カルタン (Henri Cartan)，C. シュヴァレー (Claude Chevalley), J. デルサルト (J. Delsarte)，J. デュドンネ (Jean Dieudonné)，Sz. マンデルブロー (Szolem Mandelbrojt)，R. ド=ポッセル (de Possel)，アンドレ=ヴェイユ (André Weil) である．カヴァイエの姉妹による伝記［H3］で引用されている彼の手紙によれば，もうひとりの数学者として，Ch. エーレスマン (Ch. Ehresmann) がこのグループに属す，とされている

のメンバーではない」を“$a \notin b$”と表すことにすれば，フレーゲが考えていた広範な原理を次のように表現できる．C を $\{y \mid \Phi(y)\}$ とする．すると，任意の対象 a について，$a \in C$ であるのは，$\Phi(a)$ であるとき，かつそのときのみである．ラッセルは，カントルのアイデアを発展させて，$\Phi(y)$ を $y \notin y$，つまり自分自身のメンバーではない，という性質とおけば，矛盾が帰結することに気がついた．なぜなら B を自分自身のメンバーになっていない対象すべてからなるクラスとしよう．つまり $B = \{y \mid y \notin y\}$ である．すると任意の y について，$y \in B$ になるのは，$y \notin y$ であるとき，かつそのときのみである．したがって，特に y が B である場合には，$B \in B$ になるのは，$B \notin B$ であるとき，かつそのときのみになる．

これに対する反応として，無限の概念，とりわけカントルの基数と順序数の理論を使った過度に思弁的な数学の分野を放棄するべきだ，と考える数学者たちがいた．これには，クロネッカー，ポアンカレ，ブラウエル (Luitzen Egbertus Jan Brouwer)，ヘルマン=ワイルの名を挙げておくべきだろう．

しかし，こうした大掛かりな切断手術は避けたいと考える数学者たち——特にヒルベルト——もいた．そして数学——つまり，その言語，公理，推論の方法など——を形式化し，正しさを疑うことができないような手段で，形式化された体系が矛盾していないこと，つまり**無矛盾**であることを証明する，という研究プログラムが提案された．

さて「数学を形式化する」と言ったが，これはあいまいである．つまり，どのくらいの数学を含めることができ，あるいは含めるべきなのだろうか．ヒルベルトは間違いなく，彼の数学の形式化で，カントルの順序数についての仕事を保持しておきたかっただろう．なぜならヒルベルトという数学者を可能にしたのはカントルだからである．ヒルベルトは彼の**基底定理**によって名声を得た．これは現代的な用語では，可換環 R でのすべてのイデアルが有限生成されているなら，変数 $X_1, \ldots, X_n$ からなる R 係数の多項式がつくる環 $R[X_1, \ldots, X_n]$ についても同じことが成り立つ，という定理である．最近の研究によって，この定理の証明は順序タイプ ω^ω の整礎性に，単に依存するのみならず，正確な意味で[2]同値であることが知られている．

---

[2] ［M21］を見よ

かくして，ヒルベルトがカントルのパラダイスについて語るとき，それは無心な称賛といったようなものではない．ヒルベルトは，超限帰納法に，その内部で代数幾何が進歩することができる概念的枠組みの誕生を認めたのである．

パラドックスをさけるためにラッセル自身が考えたのは，**分肢タイプ理論**であった．これは，扱いにくい代物だったが，1910年までには，より単純な体系がツェルメロ (E. F. F. Zermelo) によって提案された．さらに1930年代には，フレンケル (A. A. Fraenkel)，そしてスコーレム (A. Th. Skolem) が，ツェルメロの体系を補強するために**置換公理**を提案した．そうして得られた体系は，ツェルメロ・フレンケル集合論として知られている．ツェルメロが最初に定式化し，関数解析と高等代数で重要な役割をはたす**選択公理**と，フォン=ノイマンが提案した**正則性公理**とをさらに付け加えたZFCは，非常に役に立つ体系であると認められている[3]．

ヒルベルトのプログラムには2つの要素がある．つまり，そこで作業をするための体系を提案する，という創造的な側面と，提案された体系の適切さと無矛盾性をテストする，という批判的な側面である．当然のことながら，ブルバキ・グループの人々，すなわち**ブルバキスト**たちは，数学で矛盾が起こる可能性に注意をはらっていたので，彼らの教科書がそうした問題を逃れているようにする，という確固たる決意をもっていた．実際のところ，このシリーズの初期の一巻である『集合論』は，後続する巻に必要な基礎を確立するためのものであった．

さて先日，この本を読んでみようと思った．

心底，驚かされた．この本は，ともに1928年に出版されたヒルベルト・アッカーマン (Wilhelm Ackermann)『記号論理学の基礎』([M12]) と，シェルピンスキー (Wacław Sierpiński)『超限数講義』([M19]) を読んだことはあるが，それ以後の文献はなにも読んでいない人間の著作にみえた．

数学の基礎に対するブルバキの態度と，集合論に対する態度の両方に困惑させられたので，少し背景を探ってみることにした．その結果，ブルバキス

[3] ツェルメロは，1908年には公理のリストに選択公理を入れていた．現在の習慣では、この公理を使うときには、明示的にそう述べることになっている．

トは30年代と40年代にいくつかの論文を出版して，基礎に関する問題に対するグループの立場を開陳していることが分かった．

アンリ=カルタンとジャン=デュドンネは，彼ら自身の名前で数学の基礎についてのエッセイを著している．第2次世界大戦後，ニコラ=ブルバキ自身がアメリカの記号論理学会で講演を行い，その内容は『記号論理学雑誌』(Journal of Symbolic Logic)に掲載された．さらにブルバキは『数学の構造』([M2])というエッセイを著し，それは英語に翻訳されて『アメリカ数学月報』(American Mathematical Monthly)に載った．

これらのエッセイには，ある統一性がある．創造的な側面については，提案している集合論はツェルメロのそれであり——強調しておこう，ツェルメロ・フレンケルではない——，さらにその集合論が数学すべてにとって十分であると述べている．批判的な側面では，彼らにはすべて，ヒルベルトの形式主義プログラムの影響がみうけられる．誰一人として，ゲーデル(Kurt Gödel)に言及していない．

ヒルベルトのプログラムに対するブルバキのコミットの深さを思えば，ゲーデルに言及していないというのは驚くべきことである．不完全性定理に対するなにがしかのコメントは，必須である．

1930年9月にケーニヒスベルクで集会があり，その会期中にヒルベルトに名誉市民号が授与された．ヒルベルトはその年の1月23日にゲッティンゲンでの学部長職から退いたばかりであった．この祝福すべき機会にヒルベルトが行った有名で力強い講演『自然認識と論理』は，解決不可能な問題はない，という彼の信条の表明[4]であり，彼の決意を示す雄叫びで終わるものだった．

> "Wir müssen wissen;
> wir werden wissen."

——我々は知らねばならない，我々は知ることになる——．歴史の微妙な皮肉で，ちょうどこの前日，ゲーデルが不完全性定理を，ペアノ算術やツェルメ

[4] ヒルベルトの講演［M13］の最後から2番目の文は，次のようなものである．「なぜコント(Auguste Comte)が解決不可能な問題を見つけられなかったのか，ということの真の理由は，私の考えによれば，解決不可能な問題などというものはまったく存在しないということにある．」

ロ・フレンケル集合論のような任意の体系への応用とともに発表していた[5]．聴衆にはフォン=ノイマンがいたが，ヒルベルト[6]の姿はなかった．

ゲーデルの発表は，センセーションをひき起こしたはずだ，と思うかも知れない．ヒルベルトはパラドックスに対して非常に積極的な対応策を提示し，エルブラン (Jacques Herbrand) のような弟子たちは，ヒルベルトの精神にのっとって，決定問題のいくつかの場合を解決していた．ゲーデルが示したのは，ヒルベルトの提案[7]には深刻な限界が存在する，ということである．ゲーデルは，ある最低限の条件――例えば，任意の文について，それが公理であるかどうか判定するアルゴリズムがなければならない，という明らかに望ましい要求など――をみたす体系は，それがいかなる体系であろうとも，すべての数学をとらえることはできない，そしてそうした体系の無矛盾性証明は，もとの体系よりも矛盾している可能性が大きい体系の中でのみ与えられる，ということを証明したのである．

この結果の数学の基礎に関わる重要性と，ゲーデルのアイデアに対するフォン=ノイマンらの熱烈な反応を考えると，ごく自然に，ゲーデルがブルバキストに対しておよぼした影響を問いたくなる．しかし奇妙なことに，ブルバキストの著作中に，ゲーデルの名前を探しても，徒労に終わるだけである．ブルバキストはゲーデルを無視した，とさえ言いたくなるかもしれない．ただし，彼らの著作のあるものには，なにかが起こってしまった，という居心地のわるさと，いやなにも起こっていない，と思いたい気持ちの葛藤を示唆する調子がみうけられる．あたかも，ドラゴンのいる弧島にいることが分かったのに，ドラゴンに名前をつけなければ，それは存在しない，と信じこもうとしているかのようである．

例えば，アンリ=カルタンは，『数学の論理的基礎』([M5])[8]という著作で，選択公理を含めたツェルメロの体系を提示している．そこで彼は，フレンケル

---

[5] ケーニヒスベルクでのゲーデルの発表に続いて，その概要が 1930 年 10 月 23 日にウィーン学士院に伝えられ，1930 年 11 月 17 日には，論文のテキストが公刊のために受理された．

[6] おそらく翌日の講演の準備をしていたのであろう．

[7] ヒルベルトのプログラムに対する最近の評価については，例えば［M11］,［M18］,［M20］などを見よ．

[8] ［M5］: 原稿は 1942 年 1 月 15 日に受理され，1943 年に出版された．

によって導入された変更をある程度取り入れると述べてはいるが，主要な変更点，つまり置換公理を含めてはいない．カルタンはまた，ツェルメロの体系は，実際そうだが，順序対の適切な定義を欠いているため不便である，云々，とコメントしている．さらに,「証明可能」というべきところを「真である」,「反駁可能」を「偽である」,「決定されない」を「疑わしい (douteuse)」, ということで，カルタンはゲーデルが強調した区別に対して，無知であることをあらわにしている．

カルタンは矛盾した理論について語り，与えられた理論が矛盾しているか否かを決定するという問題は，いわゆる**決定問題**に導く，と述べている．決定問題とは，与えられた関係 (つまり式) が論理的同一性 (つまり定理) であるか否かを決定する一般的な方法を見つける，という問題である．この問題は，——カルタンはいう——, 特別な場合にのみ解決されている．一般には，どうすればよいのか分からない．カルタンが続けていうのは,「しかし，これらの問題は，たしかに重要ではあるが，我々の考察の対象外である.」

カルタンは，エルブランの学位論文，シェルピンスキーの『超限数講義』に言及している．また，デュドンネに由来すると彼がいう見方を採用し，これらのアイデアは 1939 年に出版されたが，1938 年にさかのぼる，とした後で，次のように述べている．

> 数学的理論は，単に公理の体系によって決められている論理体系である．その理論で扱う実体は，公理体系によって自ずから定められる．公理体系は，ある意味で，真なる命題が適用される素材を提供するのである．論理理論にとって固有の数学的領域は，そうした実体を定義し，それらに名前をつけ，命題と式をそれらに適用することにある.[9]

カルタンは，カントル，クロネッカー, ツェルメロ，ブラウエル，スコーレムのパラドックス，ポアンカレ，ルベーグ (Henri Léon Lebesgue) に言及する．

---

9 "une théorie mathématique n'est pas autre chose qu'une théorie logique, determinée par une système d'axiomes ... les être de la théorie sont definis *ipso facto* par le système d'axiomes, qui engendre en quelque sorte le matériel auquel vont pouvoir s'appliquer les propositions vraies; definir ces être, les nommer, leur appliquer les propositions et relations, c'est en cela que consiste la partie proprement mathématique de la théorie logique."

しかし，ゲーデルには一言もふれていない！

明らかにカルタンは，数学の基礎に関わる問題について考えている．しかし，そうするとなぜゲーデルの結果に言及しないのだろうか．これについて訊ねることができたフランス語に堪能な人のあいだでも，カルタンの論文が不完全性定理を意識していたのか，あるいはカルタン自身はもっていたであろうそうした意識を，読者に伝えようとしていたのか，一致した見解がえられない．これは，1942年における *est tout idéal*（まったく観念的である）という語の意味に関わっている．問題の文章は，以下のとおりである．

> Le problème de décider si une proposition donnée est vraie dans une théorie se ramène à celu-ci: une relation donnée est-elle une identité logique? De même pour le problème de décider si une théorie est ou n'est pas contradictoire. Ces problèmes se ramènent donc, en définitive, à l'Entscheidungsproblem, qui consiste à trouver une méthode générale permettant de décider si une relation, explicitement donnée, est ou n'est pas une identité logique. Ce problème n'est résolu que dans des cas particuliers.
> De sorte que, jusqu'à nouvel ordre, le partage en trois catégories dont nous venons de parler (propositions vraies, propositions fausses, proposition douteuses) est tout idéal: dans une théorie dont on saurait qu'elle n'est pas contradictoire, il y a des propositions dont on a prouvé qu'elles sont vraies, d'autres dont on a prouvé qu'elles sont fausses (les négations des précédentes), d'autres dont on ignore à la fois si elles sont vraies ou si elles sont fausses. Et encore, généralement, ne saura-t-on même pas prouver qu'une théorie donnée n'est pas contradictoire.

> ある与えられた命題が，ある理論の中で真であるかどうかを決定する問題は，次のことに帰着する．与えられた関係は，論理的同一性であるか否か．同じことが，ある理論が矛盾しているかどうかを決定する問題にもあてはまる．これらの問題はしたがって，結局のところ，決定問題に帰着する．決定問題とは，明示的に与えられたある関係が論理的同一性であるかどうかを決定するための一般的な方法を見つける，という問題である．この問題は，特別な場合にしか解決されていない．その結果，当面のところ，いましがた論じたばかりの3つの範疇（真なる命題，偽なる命題，疑わしい命題）への分類は，まったく観念的なものである（*est tout idéal*）．矛盾しないことが分かっている理論の内部に

> は，真であることが証明されている命題，偽であることが証明されている命題 (先の命題の否定), 真であるか偽であるか分からない命題，がある．しかしもう一度いうが，一般的には，ある与えられた理論が矛盾していないことを証明する手段はないのである．

同じようにあいまいな態度は，カルタンが引用しているデュドンネによる 1939 年の論文『現代の公理的方法と数学の基礎』([M8]) にもみうけられる．デュドンネは，ヒルベルトが非常に役に立つとみなしたカントルの仕事について,「常識にひどく反する」[10]と記している．彼は，今世紀初頭の数学の危機は，ヒルベルトの形式主義によって解決された，と考えている．つまり，数学の正しさは，ある種の規則に従う，という問題なのであり，解釈の問題ではない，というわけである．デュドンネは，

> 形式主義的方法の最大の功績は，数学的思考に依然としてのしかかっていたあいまいさを，完全に追い払ってしまった，ということになるだろう．[11]

とコメントし，さらに

> ヒルベルトの考えが実現できることを，もちろんまだ示さなければならない．[12]

と述べている．デュドンネもまたゲーデルの名を挙げていない．しかし，彼は，以下のような言葉で，ゲーデルの結果からくる懐疑的な意識をほのめかしている．

> その上，最新の結果によれば，ヒルベルトが信じていたことに反して，数学の無矛盾性証明に到達するためにメタ数学で採用しなければならない規則は，数学的規則それ自身と同じぐらい高い抽象度のものになる，ということのようである．これは，そうした "証明" の意味をひど

---

10 [M8] : "resultats si choquants pour le bon sens!"

11 "le principal mérite de la méthode formaliste sera d'avoir dissipé définitivement les obscurité qui pesaient encore sur la pensée mathématique"

12 "Il reste naturellement à montrer que la conception de Hilbert est réalisable"

く損なうことになろう.[13]

デュドンネは，数年後，ヒルベルトへの追悼文で，この意識を再度表明している．しかし依然として，恐ろしい名を挙げるまでにはいかない．

ヒルベルトの直観は，一度だけは，彼をしていささか行きすぎた希望を抱かせてしまったように思える．今日では，そうした“証明”が可能であることを疑う十分な理由がある.[14]

ニコラ=ブルバキ[15]は,『数学を研究する人のための数学の基礎』([M4])[16]で，またも選択公理を加えたツェルメロ集合論を提示し，次のように結論づけている．

これらの基礎の上に，今日ある数学すべてを構築することができる，といっておこう．私のやり方になにか独創的なところがあるとすれば，こう言うことに満足するだけではなく，ディオゲネス (Diogenes) が運動の存在を証明したのと同じやり方で，このことを私が証明していく，という点にのみある．私の証明は，この論考が進展していくにつれ，よりいっそう完全なものになるだろう．

もうお分かりのように，この論文ではゲーデルの仕事への言及どころか，その存在を示唆するものさえない．1948 年には，出版後 17 年たっていたにもかかわらず，である．

ブルバキの別のエッセイである『数学の構造』では，ゲーデルの名前はやはりでてこないが，ここでは「困難」がほのめかされてはいる．

さて，以下で問題にしたいのは，次の 2 つの問いである．

13　“En outre, il semble, d’après les travaux les plus récents, que, contrairement à ce que croyait Hilbert, les règles qui’il serait nécessaire d’adopter en mémamathématiques, seraient d’un degré d’abstraction aussi élevé que les règles mathématiques elles-mêmes, ce qui amoindrit encore la portée que pourrait avoir une telle ‘demonstration’.”

14　[M9]：“Il semble que l’intuition de Hilbert l’ait, pour une fois, entraîné à des espoirs quelque peu exagérés, et on a actuellement de bonnes raisons de douter de la possibilité de telles ’démonstrations’.”

15　[M4]，および [M2] もしくはその英訳 [M3] を見よ．

16　この「数学を研究する人 (working mathematician)」というみっともない言い回しが，歴史上初めて登場したのはここでだろうか．

なぜブルバキはゲーデルに言及しないのか

そして

なぜブルバキは，選択公理をもったツェルメロ集合論の体系だけでは，現存の数学に不十分であることに気がつかなかったのか．

これらの問いが重要であると思うのは，ブルバキ・グループはたいへんな影響力をもってきたからである．彼らの著作の持つ積極的な価値と，彼らが成し遂げたことの大きさに，異義を申し立てようというのではない．彼らの論理学と集合論に対する態度は，より若い世代の数学者に受けつがれてきたが[17]，しかし，それは有害なものだ，といいたいわけである．なぜなら彼らの態度は，数学の本質についての，活力を与えてくれる洞察に，気がつかないようにしてしまうからである．ブルバキは死んだ，という人がいるが，もしもそうであるなら，ブルバキは自分の態度の不毛さのゆえに死んだのである，とさえいいたくなる．

これらの問いに対して，どうしても推測を含んでしまう答えを出す前に，これらの事柄についてのブルバキストのコメントをもう少し探っておこう．

『数学の構造』でブルバキは，彼が反対する論理的形式主義と，賛成する公理的方法を，注意深く区別している．

> 公理的方法がその本質的な目的とするのは，まさに論理的形式主義が，それ自身としては提供できないものである．それはすなわち，数学の根底的な有意味性である．

つまり，公理的方法というのは，ブルバキにとって，すべての数学のための壮大な演繹装置なのではなく，単に各分野をその骨組みにまでそぎ落とし，それにより類似性を明らかにし，定理を簡潔にするための，精神的な規律を意味しているのである．

> (公理的方法が) 数学にもたらす統一性は，形式論理の甲冑，つまり生

[17] 1988 年に，ブルバキの弟子の 1 人が，ある古い大学の学部学生に対して集合論の講義を行ったが，そこでは本当は定理でないものに，証明が誤って与えられていた．この間違いの精神的な先祖をたどれば，46 年前のブルバキストの態度にさかのぼることができよう．

> 命なき骨組みの統一性ではない．
> 多くの数学者は，公理系というのは，どのような理論も産み出すことのない，不毛な論理的重箱つつきである，としか思ってこなかった．
> 学問を静的に考える，ということほど，公理的方法からかけ離れているものはない．我々は，学問の最終的な状態を描き切ったという主張を行っている，などと読者に考えてもらいたくない．
> これはきわめてありそうだが，数学の将来の発展が，新しい公理や，公理の新しい組合せの有益さを明らかにすることで，根本的構造の数をふやすかもしれない．

アンドレ=ヴェイユは，数学の文法というブルバキストの論理学観を，もう少し外交辞令を加えて述べている[18]．

> しかし，論理学は数学者にとって衛生上よいかもしれないが，それは決して食物を与えてくれはしない．数学者の毎日の糧となるパンは，大きな (数学的) 問題なのである[19]．

かくして，論理学に大きな問題などはない，と彼が思っていることを，もちろん明らかにしているわけである．ヴェイユは続けて，ゲーデルにふれてはいないものの，論理学について最終的な判断をくだすのはまだ早いかもしれない，という意識を示唆している．

> いつの日か，我々の後継者たちが，我々が許していない推論様式を，集合論に導入したいと思うことも，おそらくはあるかもしれない[20]．

この生き生きとした見方は，上で引用したブルバキの最後の段落を思いださせるが，後に『数学の景観』([M10])[21]でデュドンネが表明したがちがちに固

---

18 ［M24］「数学の未来」において

19 "Mais, si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes."

20 "Il se peut sans doute qu'un jour nos successeurs désirent introduire en théorie des ensembles des modes de raisonnement que nous ne nous permettons pas."

21 ［M10］：この著作では，シェラー (S. Shelah) の名前がモデル論における主要な研究者のリストに挙げられていない．シェラーの最初の 2 つの本と，最初の 322 個の論文は，［F1］の 398 ~418 ページに簡便に枚挙されている．

まってしまった見解と，好対照をなす．そこでは,「集合論は十分に研究しつくされた」といわれているのである．

ブルバキの一般的なアプローチは，その宣言で，非常に明確に述べられている．

> 指導原理は，構造の階層という考え方になる．それは，単純なものから複雑なものへ，一般的なものから特殊なものへ，と向かう．
> 群論, . . . , 順序集合の理論,(整列順序を含む), . . . , 位相構造の理論 . . .

しかし，ついでに気づくのは，これらの反論の余地のない言明のただなかに，さらなるコメントなしには誤解に導く言明がみうけられることである．

> 最初の公理的取り扱い(デデキント・ペアノ算術，ヒルベルトによるユークリッド幾何学)は，群論などとは違い，完全な公理体系により，あますところなく確定している1価的な理論を扱っていた．

ヒルベルトによって公理化された2次元と3次元のユークリッド幾何学が完全に確定している，というのは本当である．そのため，空間幾何を使って証明できる平面幾何の言明は，平面幾何での証明をもつ．しかし，ペアノ(G. Peano)によってであれ，誰によってであれ，公理化された算術については，これは正しくないことを，ゲーデルは教えてくれている．おもしろいことに，2次元の射影幾何についても，これは正しくない．ただし，公理としてデザルグの定理をもう1つ付け加えさえすれば，完全に確定することにはなる[22]．ペアノ算術が1価的だ，とブルバキがいうとき，おそらくは算術の標準モデルの2階論理による特徴づけを考えていたのだろうが，これはもちろん問題回避でしかない．

これらの文面から読み取れるのは，ブルバキは，ヒルベルトとその学派の仕事がもつ積極的な価値を認め，数学の正しさという問題を1組の規則に還元するアイデアを歓迎してはいたが，ゲーデルがヒルベルトのプログラムが達成不可能であることを示した後も，論理学と集合論は第1巻で片付いており，もう忘れてしまって構わない，と考え続けていたということである．

---

[22] これらの点の，より詳細な議論は,［M1］を見よ．

ブルバキの本も，版を重ねるにつれ変遷し，ゲーデルに言及し，独立性に関する結果にふれ，置換公理を採用するようになっている．しかし，この考察のそもそものきっかけとなった前ゲーデル的態度は，依然として残っている．そのため，この数学の膨大で重要な体系的叙述は，数学の基礎についての理解が 1929 年の段階にとどまっている人々によって書かれた，という印象を与えるのである．

さて，第 1 の問いであった

> **なぜ，ブルバキストは態度をあらためて，数学の基礎にとって最高度の重要性を持つゲーデルの仕事を考慮にいれるようにしなかったのか**

に戻ることにしよう．なぜ，基礎についての研究の進展にもかかわらず，数学の基礎についてのブルバキの理解は進展しなかったのか，と問うことにしても同じである．

答えは，社会学的，心理学的，数学的といったいくつかのレベルで探すことができよう．

ブルバキの姿勢には，例えば，ナショナリスト的な要素があったかもしれない．これを，アレクサンドル=コイレ (A. Koyré) の次のような見解[23]に照らしてみよう．

> フランスでヘーゲル (G. W. F. Hegel) が百年にもわたって無視されてきたのには，ヘーゲルの著作の不明瞭さ，強力なデカルト哲学とカント哲学の伝統，などの理由もあるが，一番の原因は，フランス人はヘーゲルの “論理的総合と歴史的生成の厳密な同一性” に疑心暗鬼であった，ということである．なぜなら，フランス合理主義者にとって，歴史は，永遠で超時間的であるはずの理性や論理とは，別のものであったからである．

知的排外主義の例は，他国と同様フランスでも，いたるところにみうけられる．パラケルスス (Paracelsus) の思想に対するパリ大学の 1 世紀にもわたる

23 ［H4］および［H6］を見よ．

抵抗[24]や，デカルトの影響下での，ライプニッツ (G. W. Leibniz) の無限小に対する抵抗などが挙げられよう[25].

とはいえ，30 年代のフランスには，ゲーデルの仕事を熟知し，それを積極的に広めていた学者たちもいた．例えば，アルベール=ラウトマン (Albert Lautman) の単行本『生成の構図』([M14] 所収) や，ジャン=カヴァイエ (Jean Cavaillès) の『数学の基礎の問題』や『算術の無矛盾性』([M6] 所収)[26]といった表題の著作などを見ればよい．そうすると，反ゲーデル的な態度にあるナショナリスト的な要素は，ブルバキ・グループに特有なものだったのかもしれない．

興味深いことに，カヴァイエは 1929 年を，現代論理学の発展の上で素朴な時代が批判的な時代に移り変わる年として見ている．そうすると，心理学的なレベルで，これは，ブルバキストが自分たちがなれ親しんできた論理学に対する素朴な見方から抜け出せなかった，ということを示唆する．いずれにせよ，少なからぬ数のヨーロッパの数学者がそうだったのである．

論理学に対するブルバキの態度は，カントルとラッセルの仕事に対するポアンカレの小馬鹿にした態度からきているのかもしれない．ポアンカレは『最終論考』で敵対者に対する理解を示し，死の 3 週間前に行った『精神的同盟』という講演では，考え方と方法は異なるにせよ共通の理想を追求する人々のあいだで，相互理解が必要だと述べてはいる．しかしこうした和解の身振りは，論理学に関する初期の冷笑的で，残酷なまでに滑稽で，そして結局のところは正しくない批判的著作がなした害を，帳消しにはしなかったのだろう．

ファン=ハイエルノート (van Heijenoort) は，エルブランの『論理学著作集』1968 年フランス語版への序文で，フランスにおける論理学の悲しい現況にふれながら，ポアンカレによってなされた害は，多くのフランス人論理学者の早すぎる死によってさらに甚大なものになった，と指摘している．例えば，1914 年の動員時にトラック事故で死んだクーチュラ (Couturat)，1924 年に

---

[24] いつでも人気のあるグラントンのダクル (Trevor-Roper) 卿によって，知的な争いにおける彼独特の愉快な調子で記録されている．[H2].

[25] この論争には，しかし，比較的早く決着がついた．マンコス [H5] を見よ．

[26] [M6] および [M14] を教えてくれたオックスフォード大学ウルフソン・カレッジのマンコス博士に感謝する．

31歳で肺炎により死んだニコ(Nicod)，1931年に23歳で登山中に死んだエルブラン，そして，それぞれ41歳と36歳で，レジスタンス活動のさなかドイツ軍によって1944年に射殺されたカヴァイエとラウトマン，などといった人々である．いま最後にふれた損失は，より広範な現象の一部でもある．つまり，ヒットラーから逃れたヨーロッパの論理学者は，アメリカとイスラエルで繁栄した学派をつくり，その結果ヨーロッパは置き去りにされたのである[27]．

ブルバキストは，ヒルベルトによって惑わされたのかもしれない．自分のプログラムに強い信念をいだいていたヒルベルトにとって，ゲーデルの結果を受け入れるのは，初めはとても困難だったのである．しかしヒルベルトは，自分よりはるかに若いフランスでの弟子たちよりも早く，このショックから立ち直ることができた．そのためブルバキストの振る舞いについては，さらにもう少し説明が必要になる．多くの他の科学者にもあることだが，ブルバキストの先入観が，知らされた事実の重要性を見ることを妨げていたのかもしれない．

どんな理由があったにしても，ブルバキストがゲーデルの不完全性定理を彼らの数学観に取り入れなかった，という事実は残る．そして，ゲーデルの洞察に対するブルバキの抵抗を，いかに社会学的，心理学的に説明しようとも，ゲーデルの仕事がヒルベルトのプログラムの信奉者につきつけた数学的，哲学的問題の解決にはならないのである．

推察されるのは，どの段階で心理的に困難になったにせよ，ブルバキストはゲーデルの仕事が強く示唆する次のような可能性に向き合うことができなった，ということである．つまり，ヒルベルトが提案し，ブルバキが受け入れたような意味での数学の基礎というものはない．数学を，論理学やクラスの理論やほかのなにかで基礎づけて，いったん基礎的な事項を基本的観念を使って与えてしまえば，後は基礎について考える必要はない，というようなやり方はできない．数学の基礎に関する問題はたしかに存在するが，それらは偉大なる書の巻一に収まるようなものではない．なぜなら，そうした問題は，数

27 例えば，ケンブリッジでの4年間で，学生が聞ける論理学的なトピックについての講演は50程度であるが，ハーヴァードやプリンストンでは約250，論理学が真剣に受け止められているバークレーでは約400の講演を聞くことができる．

学すべてにいきわたっているからである．

次にいこう．2番目の問題は，

なぜブルバキ・グループは，彼らが選んだ集合論では，数学の基礎にとって不十分であることに，気がつかなかったのか

というものであった．

答えとして，次のことを挙げておきたい．つまり，ブルバキはツェルメロ集合論で十分であるような分野の数学にのみ関心をもっていた．それは，算術に対置される広い意味での幾何学と呼んでよい分野である[28]．

ライプニッツは，理性がしばしば迷いこんでしまう2つの有名な迷路があると書いている．1つは，自由と必然という問題であり，もう1つは連続と無限に関するものである．この2番目の危険をあえて冒して，ここで数学の根底にあると思える二元論について考えてみたい．つまり，それは，算術的なものと幾何学的なもの，という2つの根本的な直観のあいだにある緊張関係である[29]．この緊張関係は，次のおもしろい難問によって，描き出すことができよう．

らせん階段を，手を動かさずに，知らない人に説明できるか

これはなかなか難しい．多分それは，言葉は時間的で，それゆえ算術的であるのに対し，らせんは空間的だからだろう．この難しさの源泉は，生理学的なものであるかもしれない．左脳は時間的概念を扱い，右脳は空間的概念

---

28 ブリコーニュ博士は，アンドレ=ヴェイユやセール (Jean-Pierre Serre) らの仕事にみうけられる，幾何学と算術のあいだの成功した異種交配という観点から，この答えに疑問を呈している．しかし，彼は「基礎に関する問題が，数学のこれらの領域に直接的な影響をおよぼすことはありそうにない」というブルバキの残念な態度を共有しており，ある1つの形での異種交配に対してかくも敏感な人物が，他の形の異種交配にはなぜこんなに抵抗するのか理解に苦しむ．論理学のテクニックによって解決された代数幾何の問題の最近の例は，[F2]，[F3] および [F5] を見よ．

29 マンコス博士は，ベラバル (Y. Belaval) の本『デカルト幾何学とライプニッツ算術』[H1] の第4章へ注意を促してくれた．そこでは，この二元論がデカルトとライプニッツの対立を解釈するために使われている．

を扱う[30]，という医学的証拠[31]がふえ続けているためである．

ブルバキは，幾何学の算術に対する関係という問題をはっきりと意識していた．これは，非常に古い問題で，エレア学派によって論じられている．『数学の構造』で，ブルバキは書いている．

> 実際のところ，応用数学はまったく別として，幾何学の源泉と算術のそれとのあいだには(まぎれもなく基本的な側面において)，ある種の二元論がいつも存在してきた．なぜなら，後者は最初は離散的な量についての学問であったし，前者はつねに連続的な拡がりについての学問であったからである．これら2つの側面は，無理数の発見以来ずっと対立している2つの見方をもたらした．実際，学問を統一しようという最初の企て，すなわちピタゴラス学派の算術化(「万物は数である」)を失敗させたのは，まさにこの無理数の発見である．

1世紀ばかり戻れば，オーガスタス=ド=モルガン (Augustus De Morgan) が書いている．

> 幾何学的推論と代数的過程は，それぞれ独自の領域をもつ．教育の初

---

30 実は，この論文の初期草稿に対する友好的な批評で，次のようなものがあった．「ブルバキはどちらの脳を使っていたのだろう．私の印象では，左脳である．多分，私は自分の持っているイメージを投影しているのだろう．ブルバキストはイタリアの幾何学者の右脳数学に満足していなかった．イタリアの幾何学者たちの仕事のかなりの部分は疑わしいものであったし，もしも「真である」と「偽である」が左脳的な概念で，「正しい」と「誤っている」が右脳的な概念であるなら，それらの仕事は「正しい」が「偽である」といって構わないようなものだったからである．」
「イタリア流 (レフシェッツ (S. Lefschetz)，ホッジ (W. V. Hodge) など) の思考の仕方を支える解析的・位相論的道具を発展させるかわりに，ブルバキストは代数化の道を選んだ (ザリスキ (Oskar Zariski)，シュヴァレー，ヴェイユ，グロタンディク (A. Grothendieck))．この選択は，多くのことを教えてくれるように思える．ただし，ヴェイユの場合には，自分の自然な性向にさからっていたのではないか．私はいつも，ヴェイユは解析的に考えていたが，頭が良かったので自分に異質な思考スタイルをとることができた，という印象をもってきた．このことが，彼の『代数幾何の基礎』が全般的にぎくしゃくした印象を与える理由になっているのではないか．」

31 [P1]，[P2]，[P3] を見よ．この研究に注意をひいてくれたことで，ケンブリッジ大学小児科ジョン=デイビス (John Davis) 名誉教授に感謝したい．

歩において，この2つを混ぜ合わせるのは，両者の適切な修得にとって害になる．

さらに1300年戻れば，ボエティウス (Boethius) が四学において，数学を算術と幾何学，およびその応用である音楽と天文学に分けている．つまり，ここでも2つに分割されているのである．一方で，J. J. シルヴェスター (J. J. Sylvester) は，1854年12月4日に行った『幾何学についての修習講義』[32]で，次のようにいっている．

> 数理科学全体をおおう3つの支配的な観念，いわば3つの思考領域，がある．それらのどれか，もしくはそれらを2つ以上を組合せたものに，すべての数学的真理は連れ戻される．それらは，数，空間，順序，という3つの基本概念である．
> 算術は，数の抽象的な性質を対象としている．代数を操作の学とみれば，そこでは順序が支配的な観念である．幾何学の仕事は，空間あるいは空間に存在するとされる物体の，性質と関係の発展に関わっている．
> ...
> それ自身として存する空間や，人間の精神との関係における空間の性質を考究するのは，形而上学者の領域に属する．幾何学者の，より求めることが少ないが，より多くの満足を与えてくれる仕事は，客観的実在としての空間を扱うのである....
> プラトン (Platon) に帰せられる円錐曲線の発見がなかったならば，重力の一般法則は今日にいたるまで発見されなかったかもしれない．プラトンは，自然のページがそれで書かれていると何百年も後に証明される言語の文法を，自分が書いているなどとは夢にも思わなかっただろう．
> 幾何学がなにであるかを知りたい者は，その深みにあえて飛び込み，幾何学者として考え，感じることを学ばねばならない．

しかし，シルヴェスターによる3つの区分は，順序を他の2つの上位構造と考えれば，2つに還元できるのではないだろうか．そうすると，さらに最終

[32] 彼の選集［M23］を見よ．

的な還元ができるのではないか，と思うかもしれない[33]．しかしながら，脳は空間の処理と時間的思考の処理を分離しているという生理学的事実が，数学の完全な統一は不可能であるというテーゼを支持している，と思えてならない．

そういうことで，算術的と幾何学的という 2 つの直観について考えてみたい．

この 2 つの直観は，まったく別々のものというわけではない．それぞれの言語は，十分に豊かなので，もう一方を翻訳することができる．集合論の内部では，最初に有理数を構成し，それから (例えば) デデキント切断をとることで，実数直線もどきをつくれる．逆に，直線上に同じ間隔でとった点を，整数点とみなすこともできる．しかし，こうした翻訳がなされたところでは，パラドックスが生じやすくなる．このような翻訳は，形式的性質の翻訳であり，根底にある直観の翻訳ではないからである．

例えば，ピタゴラス学派は，すべては数である，と信じたかった．しかし，正方形の対角線の長さは辺の長さと共役不可能であるという証明によって，ひどく落胆させられたのである．ここでは，簡単な幾何学的構成を持ち込むことが，算術的なパラドックスを産み出したわけである．

シュティーフェル (M. Stifel)(1487–1567) は，無理数とは何であるか，という問いをもった．幾何学は，無理数は受け入れられると示唆している．し

---

33 このトピックについて，前と同じ友好的批評は，次のように書いている.「フリーマン=ダイソン (Freeman John Dyson) は，彼の本［F4］の第 3 章で，統一指向の人間と，多様化指向の人間について，詳しく書いている．統一指向の人々は，統一に喜びを感じ，多様化指向の人々は，多様性に喜びを感じる．私はずっと，数学者は自然の傾向として，統一指向になりがちだと信じ続けている．他方で，強制法に強い関心を持っている集合論の専門家は，まったくといっていいほど統一指向ではない，とも信じている．
私が思うに，ブルバキの場合には，ダイソンの区別が著者のそれよりも肝要である．ブルバキは，なによりもまず統一性に関心をもっていた．統一性のある側面は，測度論を注意深く叙述することで達成されるし，別の側面は，解析的な理論を代数的なそれに変換し，応用の幅を広げると同時により多くの事例をとらえる，ということで達成される．代数は，まさに統一指向者の拠り所であるように思える．ブルバキは，組合せ論的内容を，ある限られた意味ではあるが，そうした手法に十分に“熟した”数学の分野について，明らかにしようとしている.」
ダイソンの区別というのは，この論文の冒頭に挙げた創造と基盤固めの区別と，どこがどう違っているのだろうか．

かし，長さとしてであり，数としてではない.「無理数は，実際の数ではない. なぜなら，それは無限によって曇らされているからだ.」と，彼は書いている. 彼は，$\sqrt{2}$ を信じなかったのである.

別の方向では，バナッハ・タルスキのパラドックスがある．これは，球を有限個の部分に分割し，それらを空間的な平行移動と回転で再配置すると，もとの球と同じ大きさの 2 つの球ができる，というものである．これは，選択公理を伴ったシュレーダー・バーンシュタイン論法によって証明できてしまう (選択公理なしでは，バナッハ・タルスキ定理は，成り立たないかもしれない).

ここでは，集合論の文脈では自然な議論が，幾何学的にはパラドキシカルな結論に導いてしまっている．これには，ある種の立方根はユークリッド無理数ではない，という 13 世紀のフィボナッチ (Fibonacci) の結果と，通いあうものがある.

幾何学対算術，という問題に対してブルバキがとった態度は，今日でも依然として重要性をもっている．というのも最近，アメリカの著名な数学者ソーンダース=マックレーンが，数学の哲学に関する議論の復活を要請し,「数学の大集合論的基礎」と彼がよぶものを，以下のような言い方で批判しているからである.

> 「大集合論的基礎」は，数学についての誤った一面的な見方である．集合論は，大部分の数学を行う上で，ほとんどまったく関わりを持たない. 論理主義，形式主義，プラトニズムは，集合論と演繹的厳密さという概念に，あまりにも支配されすぎてきた.

こうした批判は他にもあり，例えばトム (René Thom) は次のようにいっている.

> 集合論は，幾何学を押しつぶす.

さらに，これらすべて以前に，スコーレムの 1922 年の論文での滋味深い結論がある．これは，おおまかに翻訳すると，次のようにいっている.

> 上で得られた最も重要な結論は，集合論という概念の相対性である．私

> は，このことを，1915/16年の冬に，ゲッティンゲンのF. ベルンシュタイン (F. Bernstein) 教授に口頭で伝えた．これについて，これまでなにも公刊していなかったのには，2つの理由がある．1つは，それ以降私が他の事柄で忙しかったためである．もう1つは，この公理的集合論は，数学の最終的な基礎としては明らかに不十分であり，大部分の数学者はこれにあえて関ろうとはしないだろう，と思っていたからである．ところが最近になって，驚いたことに，たいへん多くの数学者が，集合論を数学の理想的な基礎とみなしていることに気がついた．そのため，この批判を刊行するための時期が熟した，と思われる．[34]

しかし，こうした攻撃が再開されているのは，ブルバキが論理学についての数学者の知識を，1929年のレベル[35]で化石化してしまったからではないのだろうか．マックレーンは，1930年から1933年までゲッティンゲンでベルナイス (P. Bernays) の学生であったため，論理学についてブルバキストよりもはるかに良く分かっているはずだ．しかし彼は，別の言い方をすれば，過去60年間で論理学者は捨ててしまったが，数学者は依然としてとどまっている立場を，批判しているだけなのである．

ここで，マックレーンが彼の本『数学：その形式と機能』([M16]) で提示した基礎に関する見解について，その利点と弱点を十全に論じることはできない．しかし，簡単な注釈は必要だろう．

まず，スコーレムに対しては，数学に最終的な基礎などはないが，しかし集合論は数学の実質的な側面をとらえている，といいたい．マックレーンの最初の意見とトムの意見には同意できるし，それらは，集合論は数学の幾何学的な面ではなく算術的な面に属する，という考えと関係づけられると思う．マックレーンの2番目の意見については，留保を加えたい．集合論は，幾何学の実践には特に関わりをもたないが，最も広い意味での算術にとっては大きな関わりがある，と考えるからである．

---

34 ［M22］を見よ．

35 実際，伝説になっている話によれば，ブルバキ・グループのメンバーの1人は，ゲーデルを含む聴衆の前で行ったプリンストン大学での講演で，論理学にはアリストテレス (Aristoteles) 以来なにも起こっていない，と言ったそうである．誰なのか，どなたかご存じないだろうか．

マックレーンの3番目の意見には同意できる．しかし，**集合論と演繹的厳密さ**という言い方には疑問がある．マックレーンは，両者を一体のものと考え，両者あいまって数学の最終的な解決と僭称している，と非難している．しかし，これら2つは別々のものであろう．論理学は言語の使用についての研究である[36]．集合論は整礎性についての研究であり，マックレーンが考えるように，集合形成の過程の研究ではない．

ツェルメロ・フレンケル集合論とツェルメロ集合論のあいだには大きな違いがある．ツェルメロ集合論——特に，マックレーンが自分の本や論文で支持しているため，マックレーン集合論とでも呼べるその部分体系——は，集合形成を可能にする体系であり，そのため幾何学的考察に適切である．ツェルメロ・フレンケル集合論は，これに加えて再帰的定義, つまり未知のものに構造を組み込むこと，を可能にする．この要素は，クリプキ・プラテク集合論の焦点なのだが，数学の算術的側面に適している．

ツェルメロ集合論では，すべての整列順序集合はフォン=ノイマン順序数と同型であることが証明できない．フォン=ノイマン順序数 $\omega+\omega$ の存在も証明できない．ただし，そうした順序タイプをもつ全順序集合の存在と整礎性は証明できる．また順序数全体，もしくは任意の整礎関係の上での再帰を正当化することもできない．したがって，算術の核心に存する帰納法は，(大部分の) 幾何学では姿を消している．他方で，幾何学的直観は，算術では姿を見せない．つまり，私たちには両方とも必要なわけである．

直線上にある等間隔の点，という整数の**幾何学的**理解は，すべての自然数は同等の資格をもつことを示唆する．ラッセル流にいえば，すべてみな同じタイプなわけである．**算術的**理解では，0が最も単純な自然数であり，より大きな正の整数は，より小さなものから生成され，そのためより複雑であることになる．その結果，いかなる2つの自然数も，同じタイプになることはない[37]．これら2つの直観の一方を他方に従属させようとすると，そのいず

[36] この言明は，多くの人に激しく論難されるかもしれない．しかしそうした論議は，論理学は集合論と同じではない，という主張を補強することになるだけである．

[37] 「算術的」整数のこうした継起性は，フォン=ノイマンによる**順序数**の定義で見事にとらえられている．この理由で，フォン=ノイマンの定義は単なる「造りもの」である，とするマックレーン教授の見解を受け入れることはできない．

れにも不当な暴力をおよぼすことになる．この2つが，健康的に相互作用しながら，ともに繁栄できる数学の哲学を，おそらくは求めるべきである．

マックレーンが彼の本で，数学の基礎として提唱している集合論[38]は，選択公理を伴うツェルメロ集合論の部分体系である．彼の提案は，したがって，これまでなしてきた批判に何ら答えるものではない．つまり，ブルバキが提示した数学についての見方はゲーデル以前のものである，という批判と，そこでの幾何学に偏向した数学に対する批判，に対してである．

最後に，肯定的な調子で締めくくろう．ジャン=デュドンネからの引用を，もう一度思い出してもらいたい．

> 私たちはまだ，組合せ論と概念的数学のあいだの関係を理解しはじめていない．

マックレーンが要求する哲学と，デュドンネが求める理解は，ともに算術と幾何学の相互作用についての新たな研究から生まれるのではないだろうか．

● 参考文献

● 数学的著作

[M1] K. Borsuk and W. Szmielew, *Foundations of Geometry*, North Holland, 1960, pp 277, 435.

[M2] N. Bourbaki, L'Architecture des Mathématiques, in [M15], pp 35-47 (銀林浩訳『数学の建築術』[M15] に所収).

[M3] N. Bourbaki, The Architecture of Mathematics. *American Mathematical Monthly* **57** (1950), pp 221-232.

[M4] N. Bourbaki, Foundations of Mathematics for the Working Mathematician, *Journal of Symbolic Logic* **14** (1948) pp 1-14.

[M5] H. Cartan, Sur le Fondement logique des Mathématiques, *Revue Scientifique* **81** (1943), pp 3-11.

[M6] J. Cavaillès, Volumes 608 and 610 of the series *Actualités scientifiques et industrielles: le Proglès de l'Esprit*, Hermann, Paris 1938. See also *Sur la Logique et la Théorie de la Science*, Presses Unversitaires de France, 1947.

---

38 [M16] での体系の論理的位置づけについての議論は，[M17] を見よ．

[M7] C. Chevalley , *Mathematical Intelligencer* **7** (1985), (2) p. 18, see also *Mathematical Intelligencer* **8** (1986), (2), p. 5.

[M8] J. Dieudonné , Les Methóde Axiomatiques Modernes et les Fondements de Mathématiques, *Revue Scientifique*, **77** (1939), pp 224-232.

[M9] J. Dieudonné , David Hilbert, in [M15] , pp. 291-297.

[M10] J. Dieudonné , *A Panorama of Pure Mathematics*, Academic Press, New York 1982.

[M11] S. Feferman , Hilbert's program relativised: Proof-theoretical and foundational reductions, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) pp. 364-384.

[M12] D. Hilbert and W. Ackermann , *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer Verlag, Berlin, 1928. (ヒルベルト，アッケルマン著『記号論理学の基礎』伊藤誠訳，大阪教育図書)

[M13] D. Hilbert , Gesammelte Abhandlungen, 3. Band, 378-387, Berlin 1935; reprinted Chelsea, New York 1965.

[M14] A. Lautman , Volume 591 of the series *Actualité scientifiques et industrielles: le Progrès de l'Esprit*, Hermann, Paris 1938. See also his *Collected Works*, 1977.

[M15] F. le Lionnais (ed.), *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, Cahiers du Sud, 1948; reviewed by S. MacLane in *Mathematical Reviews* **10**, 230 (『数学思想の流れ』村田全監訳，東京図書).

[M16] S. MacLane , *Mathematics: Form and Function*, Springer Verlag, New York 1986. (ソーンダース・マックレーン著『数学：その形式と機能』赤尾和男, 岡本周一共訳, 森北出版).

[M17] A. R. D. Mathias , Notes on MacLane Set Theory, submitted to the *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*.

[M18] W. Sieg , Hilbert's program sixty years later, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) pp. 338-348.

[M19] W. Sierpiński , *Leçon sur les nombres transfinis*, Collection Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[M20] S. Simpson , Partial Realisations of Hilbert's Programme, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) pp. 349-363.

[M21] S. Simpson , Ordinal Numbers and the Hilbert Basis Theorem, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) pp. 961-974.

[M22] Th. Skolem , Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, to be found in *Mengenlehre*, an anthology of papers written since 1874 on the mathematical, metamathematical and philosophical aspects of set theory, selected and introduced by Ulrich Felgner, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979.

[M23] J. J. Sylvester , *Collected Works*, Volume II, p. 5, Cambridge 1908; reprinted Chelsea, New York, 1973.

[M24] A. Weil , *L'Avenir des mathématiques*, in [M15] , pp. 307-320; also in his *Collected Works*, 1947a.

● 歴史的著作

[H1] Y. Belaval , *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, Paris, 1960, 1978.

[H2] H. R. Trevor-Roper , *Baron Dacre of Glanton*, The Paracelsian Movement, in *Renaissance Essays*, Secker and Warburg 1985.

[H3] G. Ferrières , *Jean Cavaillès: un philosophe dans la guerre 1903-1, 944*, Éditions du Seuil, Paris, 1982.

[H4] A. Koyré , Rapport sur l'etat des études hegeliennes en France, *Revue d'histoire de la philosophie*, **5**:2 (April-June 1931) p. 147.

[H5] P. Mancosu , The Mataphysics of the Calculus: a Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706: to appear in *Historia Mathematica* **16** (1989).

[H6] M. Poster , *Existential Marxism in Postwar France from Sartre to Althusser*, Princeton University Press, 1975.

● 生理学的著作

[P1] M. Annet , *Left, Right, Hand and Brain: the Right Shift Theory*, Erlbaum, New Jersey, 1985.

[P2] A. Beaton , *Left Side, Right Side: a Review of Laterality Research*, Batsford 1985.

[P3] S. P. Springer and G. Deutsch , *Left Brain, Right Brain*, W. H. Freeman, New York, 1981, 1985.

● さらに読み進むために

[F1] J. T. Baldwin (editor) *Classification Theory*, Springer Lecture Notes in Mathematics **1292**.

[F2] J. Denef , p-adic semi-algebraic sets and cell decomposition *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **369** (1986) pp. 154-166.

[F3] J. Denef and L. van den Dries : p-adic and real subanalytic sets, *Annals of Mathematics* **128** (1988) pp. 79-138.

[F4] F. Dyson , *Infinite in all directions*, Harper and Row 1988.

[F5] A. MacIntyre , On definable subsets of p-adic fields *Journal of Symbolic Logic*, **41** (1976) 605-610.

21世紀の数学の問題について

スティーブ=スメイル (Steve Smale)

V. I. アーノルド (V. I. Arnold) は国際数学連合 (International Mathematical Union) を代表して，多くの数学者に来世紀における数学の重要問題を述べるように要請した．このレポートはそれに対する私の回答である．

アーノルドの提案は1900年のヒルベルトの23問題([Browder, 1976]) に影響されたもので，私もこの小論を書くのにヒルベルトの問題を参考にした．

私は18の問題を選んだが，それは次のような基準に従った：

1. 簡潔な記述であり，かつ，なるべく数学的に明確であること．

2. 私が個人的によく知った問題であり，かつ，易しく思われないもの．

3. その問題，その解決，その部分的な結果，さらにはそれを解こうとする試みでさえ21世紀の数学とその発展に重要な貢献をもたらすであろうと思われること．

問題のいくつかはよく知られたものである．実際，数学の3大未解決問題と思われる次の問題を含んでいる：リーマン予想，ポアンカレ予想，P=NP？問題．そして，リーマン予想の他にもう1つヒルベルトの問題を含んでいる (ヒルベルトの第16問題)．また，私の以前の論文「力学回想：大問題とうまくいかなかった試み」[Smale, 1991] と重なるところもある．

問題 1. リーマン予想

帯領域 $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ に属するリーマン・ゼータ関数の零点はすべて直線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上にあるか？ ここで，リーマン・ゼータ関数は，$\mathrm{Re}\,(s) > 1$ で，次のように定義される関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

の解析接続である.

この問題はヒルベルトの第8問題である. ゼータ関数やリーマン予想に関しては多くの優れた書物が出版されているので, ここではこれ以上言及しない.

問題 2. ポアンカレ予想

> **M をコンパクトかつ連結な 3 次元多様体で, その上の任意の閉曲線が 1 点に変形できるものとする. このとき, M は 3 次元球面に同相であるか?**

n 次元球面とは

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

のことである. コンパクト n 次元多様体は, あるユークリッド空間の (可微分かつ非特異な) n 次元有界閉曲面だと考えることができる.

ポアンカレ予想は一般 n 次元の場合に拡張できる：コンパクト n 次元多様体 M で, 任意の連続写像 $f : S^k \to M$, $k < n$ ($k \leq n/2$ としても同じ) が 1 点に変形できるものは, n 次元球面 S^n に同相であるか?

ポアンカレ (Henri Poincaré) はこれらの問題をトポロジー理論における先駆的な論文の中で研究している. 1900 年にポアンカレ ([Poincaré, 1953], pp.338–370) は一般 n 次元の場合の証明を発表したが, その後 (1904 年に), 彼はその結果に対する反例を見つけた ([Poincaré, 1953], pp.435–498). そこで, 2 番目の論文では $n = 3$ の場合に話を制限し, 3 次元の場合を問題として提起した. ただし "予想" として述べられているわけではないことを注意しておく.

私自身とポアンカレ予想との関わりは [Smale, 1990] で述べた. そこで私は次のように書いた.

> **ポアンカレ予想について初めて知ったのは, 1955 年アナーバー市のミシガン大学で, 当時, 私はトポロジーに関する問題について学位論文を**

書いていた．すぐに，私は (3 次元の場合の) 証明を発見したと思った．研究室にいたサムエルソン教授 (Hans Samelson) に，興奮しながら私の証明のアイデアを話したが，彼の部屋を出た直後に，私の “証明” の中に 3 次元多様体に関するいかなる仮定も用いていなかったことに気づいた．

1960 年に “リオの海岸”で，私は $n > 4$ の場合の n 次元ポアンカレ予想を肯定的に解決した．そして，1983 年に，フリードマン (Mike Freedman) は 4 次元の場合を肯定的に解決した (注：$n > 4$ の場合，M は 2 つの球のなめらかな和 $M = D^n \cup D^n$(smooth union) であるというもっと強い結果を私は得たのだが，$n = 4$ の場合にこのような結果が得られるかどうかは分かっていない)．

以上の事柄の基礎知識に関しては，先の参考文献の他に［Smale, 1963］を参照されたい．

ポアンカレ以降多くの数学者が 3 次元の場合の証明を見つけたと発言しており，これらの試みについては［Taubes, 1987］に書かれている．

ポアンカレ予想が数学の歴史の中で特に重要な理由は，それが多様体を研究対象として注目するきっかけを作ったことである．代数多様体，リーマン多様体などの幾何的対象に注目することでポアンカレは 20 世紀の数学に多大な貢献をした．

私は，多項式時間アルゴリズムの概念においても同様な現象があると確信している．アルゴリズムは，単に他の問題の解決のための手段としてばかりでなく，それ自身研究する価値があるものとなってきている．したがって，私は 20 世紀の数学において (例えば多様体のような) 方程式の解集合の研究が重要な役割を果たしたように，来世紀においては (例えばアルゴリズムのような) 解を見つけることに関する研究が重要な役割を果たすのではないかと思う．

問題 3. P=NP？問題

この問題はコンピュータ・サイエンスから数学への贈り物だと思えてならない．これをより伝統的な数学の形式の問題に書き直すことは有益であろう．

そのために，まず複素数上のヒルベルトの零点定理について考える．$f_1, \ldots, f_k$ を n 変数の複素係数多項式とする．そして，$f_1, \ldots, f_k$ が共通根 $\zeta \in \mathbb{C}^n$ を持つかどうかを考える．零点定理によれば，これらが共通根を持たないことと，ある n 変数多項式 $g_1, \ldots, g_k$ があって，

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i = 1 \tag{1}$$

となることは同値である．ブラウナウェル (Brownawell)(1987) らによる実効的 (effective) 零点定理は，上の条件 (1) に加えて，次数 $\deg g_i$ が

$$\deg g_i \leq \max(3, D)^n, \qquad D = \max \deg f_i$$

をみたすものを選ぶことができると主張する．この次数の制限により，共通根を持つかどうかという問題は線形代数の決定問題になる．つまり，f_i の係数が与えられたとき，(1) 式をみたすような g_i の係数になるものがあるかどうかを決定する問題である．これにより，共通根をもつかどうかのアルゴリズムが得られるわけである．このとき，f_i の係数の個数 (これが入力サイズになる) に対し，計算に必要な算術演算の数は指数関数のオーダーで増加する．

予想　$\mathbb{C}$ 上の多項式 $f_1, \ldots, f_k$ が与えられたとき，これが共通根をもつかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムは存在しない．

多項式時間アルゴリズムとは，算術演算の回数が f_i の係数の個数に対する多項式で抑えられるものをいう．

この予想に数学的な意味を与えるには，アルゴリズムを形式的に定義する必要がある．それには伝統的なチューリング機械の定義ではうまくいかない．そこで，[Blum-Shub-Smale, 1989] で新しい定義を考案し，これに関する理論を [Blum-Cucker-Shub-Smale, 1997] (以下 BCSS と略す) で発展させた．

簡単に言うと，複素数の有限列を入力・状態・出力とするような $\mathbb{C}$ 上の機械を考える．各状態における操作は，加減乗除と有限列のシフト，そして "$x_1 = 0$?" の判定だけである．

入力 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ の**サイズ**は n で定義する．**計算時間**は入力から出力までにその機械が行った操作の数とする．以上のようにして，$\mathbb{C}$ 上の多項式時間アルゴリズムが定義できる．

この予想や機械の定義は，$\mathbb{C}$ の体としての構造しか用いていない．よってそれらは任意の体上で考えることができる．特に，$\mathbb{Z}_2$ (元が 2 つの体) 上の機械はチューリング機械と同じである．

このとき，次の決定問題を考える：k 個の $\mathbb{Z}_2$ 係数 n 変数多項式が与えられたとき，それらは共通根 $\zeta \in (\mathbb{Z}_2)^n$ をもつかどうか．

予想　この問題を決定する $\mathbb{Z}_2$ 上の多項式時間アルゴリズムは存在しない．

これは，古典的な $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ 予想の簡単な再定式化である．

以上では，NP 完全性に関する基本的な考えや定理について言及を避けてきた．クック (Cook) とカープ (Karp) の古典的な仕事に関しては［Garey-Johnson, 1979］を，任意の体に関しては［BCSS］を参照されたい．

問題 4. 多項式の整数解について

まず，計算量理論に端を発するディオファントス的不変量 τ の定義から始める．$f \in \mathbb{Z}[t]$ を整数係数の 1 変数多項式とする．いま，多項式の列 $u = (1, t, u_1, \ldots, u_k)$ は，$u_k = f$ かつ各 $l \le k$ についてある $i, j < l$ があって，$u_l = u_i \circ u_j$ であるとする．ただし，$\circ$ は $+$ か $-$ か $\times$ であり，$u_0 = t$，$u_{-1} = 1$ とする．このとき，この u を f の**プログラム**という．そして，すべての f のプログラムについて最小となる k を $\tau(f)$ とおく．

f の異なる整数解の個数は $\tau(f)$ の多項式で抑えられるだろうか？ すなわち任意の $f \in Z[t]$ に対して，$Z_a(f) \le \tau(f)^c$ であるか？ ここで，$Z_a(f)$ は f の異なる整数解の数，c は f に依存しない定数である．

シャブ (Mike Shub) と私は計算量理論の研究の中でこの問題に出くわした．私たちは，この問題の肯定的な答えが $\mathbb{C}$ 上の決定問題として零点定理の扱いにくさを導くこと，すなわち $\mathbb{C}$ 上では $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ であることを示した．詳しくは［Shub-Smale, 1995］，または［BCSS］を参照．

f の次数は $2^{\tau(f)+1}$ 以下だから，f の解は高々 $2^{\tau(f)+1}$ 個である．特に，チェビシェフ多項式 f に対しては，その異なる実数解の個数は $\tau(f)$ の指数関数のオーダーで増加する．

ディオファントス的問題の多くは2ないしそれ以上の変数を扱う．この問題は1変数のものであるにもかかわらず，その扱いは容易ではないように思われる．

最後に，関連する問題を1つ挙げておく．整数 m に対して，列 $(1, m_1, \ldots, m_l)$ で，$m_l = m$, $m_0 = 1$ かつ，各 q についてある $i, j < q$ があって $m_q = m_i \circ m_j$ であり，そして $\circ$ が，$+$ か $-$ か $\times$ であるものを m の**プログラム**という．また，$\tau(m)$ は m のプログラムの中で1番短いものの長さ (上の l にあたるものの最小値) と定義する．つまり，$\tau(m)$ は，1から加減乗算を使って m をつくる最小の方法を表す．

問題　任意の自然数 k に対して $\tau(k!) \leq (\log k)^c$ か？

おそらくこれは成り立っていない．$k!$ は"計算し難い"のである［Shub-Smale, 1995］．

問題5. ディオファントス曲線の高さによる制限について

ディオファントス方程式 $f(x, y) = 0$ の可解性は，$f \in \mathbb{Z}[u, v]$ を入力として 2^{s^c} 時間で判定できるか？

ここで，c は定数，f のサイズ s $(= s(f))$ は，

$$s(f) = \sum_{|\alpha| \leq d} (\log |a_\alpha| + 1),\ \text{ただし}\ f(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$，かつ $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_i \geq 0$ である．

そして，$f(x, y) = 0$ が整数解を持つとき f は可解という．問題5はチューリングによる計算モデルを使って形式化できる．

この問題の本質的な部分は［Cucker, Koiran and Smale, 1997］で提起されている．サイズ $s(f)$ は f の"高さ"を示すものの1つである．例えば［Lang, 1991］の中で述べられているような高さの予想は，この問題の解決に役立つだろう．また［Manders-Adleman, 1978］も参照するとよい．

問題6. 天体力学における相対平衡の有限性

n 個の正の実数 $m_1, \ldots, m_n$ を，天体力学における n 体問題の質量として与えたとき，相対平衡点の数は有限か？

この問題はウィントナー (Wintner) の 1941 年の天体力学の本に書かれている．相対平衡点とは平面の回転によって導かれるニュートン方程式の解である．

3 体問題に関しては，その相対平衡点は 5 つあり，そのうち 3 つはラグランジュによって，2 つはオイラーによって発見された．4 体問題に関してはその有限性は知られていない．

［Smale, 1970］において，私は相対平衡点を，平面 n 体問題のポテンシャルから導かれる関数の臨界点と解釈した．もう少し詳しく述べよう．いま

$$S_k = \{x \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \sum m_i x_i = 0,\ 1/2 \sum m_i \|x_i\|^2 = 1\},$$
$$\Delta = \{x \in S_k : \text{ある } i \neq j \text{ について } x_i = x_j\}$$

とする．回転群 $SO(2)$ は $S_k - \Delta$ に作用する．また，ポテンシャル関数

$$V(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}$$

は回転群 $SO(2)$ の下で不変であり，商空間 $S_k/SO(2)$ は $(n-2)$ 次元の複素射影空間と位相同型である．そこで $V : S_k \to \mathbb{R}$ の商

$$\hat{V} : (S_k - \Delta)/SO(2) \to \mathbb{R}$$

を考える．すると，相対平衡点は $\hat{V}$ の臨界点と対応する．

シャブ (1970) は臨界点全体のつくる集合がコンパクトであることを示した．さらに，パルモア (Palmore)(1976) は $n = 4$ の場合にでさえ $\hat{V}$ が退化臨界点をもつかもしれないことを示した．

角運動量写像の分岐に関する事柄に見られるように，相対平衡点は天体力学において重要な役割をもつ．その上，太陽系には “トロヤ群 (木星の軌道上の一群の小惑星)” のようなラグランジュの相対平衡点に対応する天体がある．

クズミナ (Kuz′mina)(1977) は一般の場合に関して明確な上界を得た．

より詳しい説明は［Abraham-Marsden, 1978］に述べられている．

問題 7. 2 次元球面上の点の分布について

$x = (x_1, \ldots, x_N)$ は 2 次元球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の上の互いに異なる N 個の点の組とする．この x について

$$V_N(x) = \sum_{1 \le i < j \le N} \log \frac{1}{||x_i - x_j||}$$

とおく．また $\min_x V_N(x)$ を V_N と書く．

c を固定する．このとき，

$$V_N(x) - V_N \le c \log N \tag{2}$$

となる $x = (x_1, \ldots, x_N)$ を見つけることができるか．

ここで，"見つけることができる"という言葉は自然数 N が与えられたとき (2) 式をみたすような異なる N 個の S^2 の元 $x_1, \ldots, x_N$ を出力するアルゴリズムがあるということを意味する．このアルゴリズムは，正確には［BCSS］の意味の実数上のアルゴリズム (ただし，2 乗根の計算をする操作をもつもの) で N の多項式時間で停止するものをいう．

問題 7 は，計算量理論からのものである［Shub and Smale, 1993］．その動機は代数学の基本定理を実現するホモトピー・アルゴリズムの良い初期多項式を見つけることである．$V_N(x) = V_N$ となる $x = (x_1, \ldots, x_N)$ を**楕円型フェケテ (Fekete) 点**の N 項列という［Tsuji, 1959］．

N の関数として V_N は

$$V_N = -\frac{1}{4} \log \left(\frac{4}{e} \right) N^2 - \frac{1}{4} N \log N + O(N)$$

をみたす．

また，$0 < s < 2$ に対して

$$V_N(x, s) = \sum_{i<j} \frac{1}{||x_i - x_j||^s}, \qquad V_{N,s} = \min_x V_N(x, s)$$

を考えることは自然である．もとの $V_N(x)$, V_N は $s = 0$ の場合として自然に対応づけられる．また，$V_N(x, 1)$ はクーロン・ポテンシャルであり，$V_{N,1}$ は 2 次元球面上を移動する N 個の電子の均衡位置に対応する．

私は上述の主要問題に関してサッフ (Ed Saff) に助言を求めた．しばらくして，彼と彼の同僚から，以上の事柄やそれから派生した結果に関するすばらしい論文をたくさん紹介してもらった．これらの背景やより詳しい参考文献に関しては［Kuijlaars and Saff, 1997］と［Saff and Kuijlaars, 1997］を参照

していただきたい. [Rakhmanov, Saff and Zhou, 1994] に，これらの問題を裏づける数値上の証拠 ($N = 12{,}000$) がある.

我々の主要問題を別の見方で見ると，これは関数

$$W_N(x) = (\exp V_N(x))^{-1} = \prod_{i<j} \|x_i - x_j\|$$

を最適化することである. しかしながら，これに関しては [Shub and Smale, 1993] に次のように書かれている.

> **... N を添数にもつ鞍点があるためにこの問題は易しくはないだろう ($x_1, \ldots, x_N$ は S^2 の大円上で一様に分布している N 個の点である). また，W_N の様々な対称性が様相をさらに困難にさせる.**

問題 8. 経済理論への力学の導入

価格調整を含むように一般均衡理論の数学的モデルを拡張せよ.

この問題は純粋数学ではなく，経済学と数学の接点にある. 現在，きわめて制限された状況においてのみ解かれている.

経済学において均衡価格の (静的) 理論はワルラス (Walras) によって始められ，アロー (Arrow) とドブリュー (Debreu) により確立された [Debreu, 1959]. 単一の市場からなる簡明な場合，"需要=供給"方程式で表され，自然な力学が容易に分かるが，複数の市場に関する状況は複雑である.

需要過剰は，価格のなす空間から商品のなす空間への関数 $Z(p) = D(p) - S(p)$ と考えられる. ここで，需要 D と供給 S はともに個々の行為の合成によって決定されている. このとき，経済学は個人の振る舞いに関する諸条件に根拠を与え，それらの条件は Z の持つべき諸公理を導く. すなわち，$Z : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}^l$ が**需要過剰写像**であるとは次の公理をみたす Z をいう：

1. 任意の $p = (p_1, \ldots, p_l)$, $p_i \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ について，$Z(\lambda p) = Z(p)$.

2. $\sum_{i=1}^{l} p_i Z_i(p) = 0$ (ワルラスの法則：総和はゼロである).

3. $p_i = 0$ ならば，$Z_i(p) > 0$ (無料の商品に対しては正の需要がある).

この (1), (2), (3) によって，Z は境界を含まない正の象限と $(l-1)$ 次元球面との共通部分上のベクトル場とみなせる．均衡価格ベクトル，つまり $Z(p^*) = 0$ (“需要=供給”) となるベクトル p^* の存在はホップの定理から導かれる．

問題 8 は価格ベクトルを状態とする (できれば他の経済学的変数を含むような) 力学系モデルを探すということである．この理論は現存する均衡理論と両立しなくてはならない．1 番理想的なのは経済的行為者の個々の行為によって決定される価格の時間発展をも含むことである．

私はこれが経済学の最重要問題であると感じ，この問題に何年も取り組んだ［Smale, 1976］．背景については［Smale, 1981］．

問題 9. 線形計画法問題

1 次連立不等式 $Ax \geq b$ の可能解を求める実数上の多項式時間アルゴリズムがあるか？

この問題のアルゴリズムは (問題 3 と同じく)［BCSS］の論文で導入した実数上の機械によって与えられるとする．そして，連立不等式 $Ax \geq b$ の可能解を求めるとは，$m \times n$ の実数行列 A と m 項ベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ を入力したとき，任意の $i = 1, \ldots, m$ について $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ となる $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ があるかどうかを判定することである．時間はその計算をするために行った算術演算の数でみる．問題 9 は［BCSS］の中でも述べられている．

この問題は，次に述べる線形計画の最適化問題に関する決定問題の 1 つである：A, b は上のようなもので，さらに $c \in \mathbb{R}^n$ も入力したとき，制約条件 $Ax \geq b$ のもとで

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} cx$$

が存在するか否かを決定し，もし存在するならそれを実現する x を出力する．

有名なダンツィク (Dantzig) の単体法によって先の 2 つの ($\mathbb{R}$ 上の) 問題は共にアルゴリズムをもつ．しかし，クリー (Klee) とミンティ (Minty) によってこれらのアルゴリズムは最悪の場合，指数時間かかることが分かった．一方，ボルグワルト (Borgwardt) と私は，後にハイモビッチ (Haimovich) から

重要な助言を得て，平均的には多項式時間で計算できることを示した．以上のことはすべて［Schrijver, 1986］に書かれている．

有理数体 $\mathbb{Q}$ を使ったチューリングの計算モデルで，計算量を“ビット”で計って同様の問題を考えることができる．ユーディン (Yudin) とネミロフスキー (Nemirovsky) のアイデアからハチヤン (Khachian) は線形計画問題の多項式時間アルゴリズム (楕円体法) を見つけた．後にカーマーカー (Karmarker) は彼の“内点法”を使って，この問題の実際的なアルゴリズムを見つけ，それがチューリング・モデルの意味で多項式時間で計算できることを示した．これらに関しては［Schrijver, 1986］の他に［Grötschel, Lovász and Schrijver, 1993］にも書かれている．

$\mathbb{R}$ 上の問題とより関係が深いのは，これらの線形計画問題を解くための $\mathbb{Q}$ 上の“強多項式アルゴリズム”を考えることである．“強多項式”とはビット操作数と同じく四則演算数も入力サイズ $m(n+1)$ の多項式になっていることである．部分的な解はメギッド (Megiddo) と特にタルドス (Tardos) によって得られている［Grötschel, Lovász and Schrijver, 1993］．

$\mathbb{R}$ 上の問題に関しては［Barvinok-Vershik, 1989］と［Traub-Woźniakowski, 1982］にも書かれている．

問題 10. 閉補題 (Closing Lemma)

> **M をコンパクト多様体，p を微分同相写像 $S : M \to M$ の非遊走的な点であるとする．このとき S は，p を周期点にもつ $T : M \to M$ によって任意の r に対し r 階の微分に関していくらでもよく近似できる (C^r 級近似) だろうか？**

非遊走的な点 $p \in M$ とは p の各近傍 U に対して $S^k U \cap U \neq \emptyset$ となる $k \in \mathbb{Z}$ が存在する点のことである．ここで S^k は S を k 回繰り返したものである．そして，$T^m(p) = p$ のとき p は周期 m の周期点であるという．

この問題は有名な閉補題 (Closing Lemma) の離散版 (C^1 の場合はピュー (Charles Pugh)(1967) によって肯定的に解かれている) である．

C^0 級近似についてはこのようなものがあることが簡単に分かる．ペイショート (Peixoto) はこの方法が C^1 では使えないことを発見し，ルネ=トムの間違

いを正した(ルネは，これが彼の犯した最大の失敗であると私に語った).

ピューとロビンソン (C. Robinson)(1983) はハミルトン作用素の場合について C^1 級近似の閉補題を証明した．ペイショートは，円周について，さらには連続時間の場合の向きづけ可能な 2 次元多様体について，任意の r に対し C^r 級近似が可能であることを示した．最近，林 (1997) の仕事によって閉補題はますます重要になっている. [Wen-Xia, 1997] .

問題 11. 1 次元力学系は一般に双曲型か？

複素多項式 T は，任意の臨界点が繰り返しによって周期的沈点になるような同じ次数の多項式で近似できるか？

問題 11 は次数 2 の場合においてさえ未解決である．多項式写像 $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は繰り返しによって離散力学系をなすと考えられる．つまり，$z \in \mathbb{C}$ について，その**軌道**とは $z_i = T(z_{i-1})$ となる列 $z = z_0, z_1, \ldots$ である．ここで，i は (離散的な) 時間とみなしている．T の不動点 w (つまり $T(w) = w$) は，w での微分係数 $T'(w)$ が $|T'(w)| < 1$ となるとき**沈点**であるという．T の周期 p の周期的沈点とは T^p の沈点のことである．T の臨界点とは単に $T'(z) = 0$ となる点 z のことである．

さて，いまや問題は明確になった．ここからは 1960 年代からの双曲型力学系の研究の概要をみていく．

微分同相写像 $T : M \to M$ の不動点 x について，T の x での微分 $DT(x)$(これは接空間の線形自己同型写像である) が絶対値が 1 となる固有値をもたないとき，x は**双曲型**である．もし x が周期 p の周期点ならば，x が T^p の双曲的な不動点であるときに x は双曲型であるという．“双曲型”という概念は，非遊走的な元全体からなる集合の閉包 Ω に自然に拡張できる (問題 10 参照).

力学系 $T \in \mathrm{Diff}(M)$ をとる．そして Ω を T の非遊走的な元全体のなす集合であるとする．このとき，周期点全体のつくる集合が Ω で稠密かつ Ω が双曲型であるとき，T は**双曲型**である (または，公理 A をみたす) という [Smale, 1967] , [Smale, 1980] . 我々はノー・サイクル条件を仮定している．マネ (Ricardo Mãné) をはじめとする多くの人々の研究では，構造安定性と呼ばれる力学系の強い安定性概念と双曲型力学系を同一視してきた．このクラスの

力学系に対しての構造理論の研究はちょうど始まったところである.

双曲型力学系は大きな力学系を構成するが，それを越えてさらに大きな応用カオス力学系もある．双曲型の概念は可逆力学系から我々の問題の場合 (ℂの多項式) にまで拡張される．さらに，古典的複素多様体論によって我々の問題は次のようにもとらえられる.

多項式写像 $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は双曲型多項式写像で近似できるか？

複素 1 次元力学系理論は今世紀の初めファトー (Pierre Fatou) とジュリア (Julia) によって始められた．1960 年代に私は，論文を指導していた学生のガッケンハイマー (John Guckenheimer) にこの文献を読んで特に上の問題を解いてみるようにすすめた．彼は学位論文 ([Chern and Smale, 1970]) で肯定的な結果を与えたが，その証明にはギャップがあった．現在も，この問題は 1 次元力学系の基本問題として未解決である．この小論で私が提起する諸問題に対しては，ポアンカレに始まって多くの論文が誤った証明を与えており，ガッケンハイマーの論文もその 1 つである.

複素 1 次元力学系はデュアディ (Douady), ハバード (Hubbard), サリバン (Sullivan), ヨッコズ (Yoccoz), マクマレン (McMullen) など多くの人々によって活発に研究されている. [McMullen, 1994] を参照.

なめらかな写像 $T : [0, 1] \to [0, 1]$ についての 1 次元力学系理論に同じような問題がある.

問題　**なめらかな写像 $T : [0, 1] \to [0, 1]$ はなめらかな双曲型写像で C^r 級近似できるか (ただし，$r > 1$)？**

ガッケンハイマーの論文が書かれた頃，私はニテキ (Ziggy Nitecki) にこの問題を研究するようにいった．ニテキは学位論文でこの問題を肯定的に解いたと主張したが，その間違いに気づかなかったのは私のさらに大きな不注意だった [Chern and Smale, 1970].

後にジェイコブソン (Jakobson)(1971) は C^1 級近似に対する問題を解いたが，一般の場合は未解決である．詳しくは [de Melo-van Strien, 1993] を見よ.

問題 12. 微分同相写像の中心化群について

M をコンパクト多様体とする．M からそれ自身の上への微分同相写像は，自分自身の繰り返ししか可換でない微分同相写像 $T : M \to M$ で C^r 級近似できるか ($r \geq 1$)？

上のような T をとれば，微分同相写像のつくる群 Diff(M) の T における中心化群は $\{T^k : k \in \mathbb{Z}\}$ である．

私は，[Smale, 1963] で中心化群について研究を始めた．それは，コペル (Nancy Kopell) が私の下で次のような学位論文を書いた後である．そこでは，この問題の $\dim M = 1$ の場合 ([Smale, 1967] で提出) を肯定的に解いている [Chern and Smale, 1970]．現在，2 次元の場合においてさえ未解決である．

また自明な中心化群をもつ M の微分同相全体のなす集合が C^r 級位相で Diff(M) の稠密開集合であるかどうかを問題にすることもできる．

これらの問題についてパリス (Palis) とヨッコズ (1989) が主要な仕事をしている．そこでは，任意の多様体に対して，双曲型力学系の場合のほぼ完全な解を与えている．

[Smale, 1991] に私は次のように書いた．

この問題は，たとえ明確に提示することが容易でないとしても，双曲性以上に未知の領域に焦点をあてるおもしろいものであると思う．

問題 13. ヒルベルトの第 16 問題

$\mathbb{R}^2$ 上の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{3}$$

を考える．ここで，P，Q は多項式である．d を P と Q の次数の大きい方，q を P，Q に依存しない定数とする．このとき，極限閉軌道の数は $K \leq d^q$ となる定数 K で抑えられるか？

これはヒルベルトの第 16 問題の後半部の現代版である．この問題はリーマン予想を除いてヒルベルトの問題の中で最もつかみどころのない問題であろう．

実際，肯定的な解決を与えたと主張するペトロフスキー (Petrovskiĭ) とランディス (Landis)(1957) の論文以降，事態は後退しているかのようである．それよりも前に，デュラック (Dulac)(1923) は，(3) 式の極限閉軌道の個数が常に有限であることを示した．ペトロフスキーとランディスの論文の中にギャップがあることが分かった ([Petrovskiĭ and Landis, 1959]) 後，イリヤシェンコ (Ilyashenko)(1985) がデュラックの論文の間違いを見つけた．その上，シ=ソンリン (Shi Songling)(1982) は $d = 2$ の場合にペトロフスキーとランディスの与えた上限についての反例を見つけた．後に，デュラックの主張には [Écalle, 1992] と [Ilyashenko, 1991] とによって独立に長い証明が与えられた．これら 2 つの論文はいまなお数学の世界で十分に消化されていない．

有限であることは分かっているが，それがどれくらいで抑えられるかは分かっていない．このように有限性は明らかだがどれくらいで抑えられるかは未解決である特別な問題を考えてみよう．

次のものはリエナール方程式に相当する (例えば，[Hirsch and Smale, 1974] をみよ)．

$$\frac{dx}{dt} = y - f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = -x \tag{4}$$

ここで $f(x)$ は $f(0) = 0$ かつ最高次の係数が奇数 $(= 2k + 1)$ である実係数多項式である．

もし，$f(x) = x^3/3 - x$ ならば，(4) 式は 1 つの極限閉軌道をもつファン=デル=ポル方程式である．より一般に，(4) の解はすべて唯一の平衡点 (0, 0) のまわりを時計回りにまわることが簡単に示せる．これらの曲線にしたがって，ポアンカレ断面 $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ を定義できる．ここで，$\mathbb{R}^+$ は正の y 軸である．(4) 式の極限閉軌道は正確に T の不動点である．様々な講演において私は，(ある新しい不動点定理を通して？) これら不動点の個数を評価する問題を提案した．その反応として，リンツ (Linz), ド=メロ (de Melo), ピュー (1977) は k 個の異なる極限閉軌道をもつ例を見つけ，この k が上界であると予想した．まだ，$(\deg f)^q$ の形の上界は見つかっていない．T は解析的なので，任意の f に対して (4) 式は有限個の極限閉軌道をもつ．[Browder, 1976]，[Ilyashenko and Yakovenko, 1995]，[Lloyd and Lynch, 1988]，[Smale, 1991] により詳しい背景が書かれている．

問題 14. ローレンツ・アトラクター

ローレンツの常微分方程式の力学系はウィリアムス (Williams), ガッケンハイマー, ヨーク (Yorke) の幾何的ローレンツ・アトラクターの力学系であるか？

ローレンツ方程式とは次のものである：

$$\dot{x} = -10x + 10y$$
$$\dot{y} = 28x - y - xz$$
$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy$$

ローレンツ (Edward N. Lorenz)(1963) はコンピュータを使ってこの方程式を分析し，ほとんどの解が魅力的な (アトラクティング) 集合になることを発見した．こうして，彼は“カオス”の初期の重要な例を提示した．しかし，そこには数学的証明が欠けていた．この数値計算の研究は，同じような振る舞いをする幾何的な常微分方程式に対して厳密に数学的な発展を促した (Yorke, [Williams, 1979], [Guckenheimer and Williams, 1979])．この幾何的アトラクターは細かく分析され，十分に理解されたといってよい．

問題 14 は，もとの方程式の力学系が幾何的モデルによる力学系と同じものかどうかということである．最も理想的な肯定的解決は，ローレンツ方程式の解を幾何的アトラクターの解 (すなわち，幾何的アトラクターの族の元) にうつす $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への同相写像を記述すること，あるいはさらに，幾何的アトラクターの 2 つのパラメータを持つ族の元にうつす同相写像を記述することである．

この問題の解決は応用力学系の分野の基礎を築くステップになる．現在まで工学や物理の方程式系において，カオスは馬蹄形の存在の証明など弱い意味でしか与えられていない (例えば，メルニコフ (Melnikov), マースデン (Marsden), ホームズ (Holmes) など [Guckenheimer and Holmes, 1990])．

力学系における幾何的，構造安定なカオス的アトラクターも私の論文 [Smale, 1967] で与えられている．しかし，これらは物理系から生じるものではない．

第 14 問題の部分的結果がリチェリク (Rychlik) とロビンソンにより得られている [Robinson, 1989]．

問題 15. ナヴィエ・ストークス方程式

$\mathbb{R}^3$ の 3 次元領域 Ω のナヴィエ・ストークス方程式は，すべての時間でなめらかな解を唯ひとつもつか？

これはおそらく偏微分方程式論の最も有名な問題である．もう少し正確に述べてみる．ナヴィエ・ストークス方程式とは次のようなものである：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u \cdot \nabla)u - \upsilon \Delta u + \mathrm{grad}\ p = 0, \quad \mathrm{div}\, u = 0$$

ここで，$u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級写像であり，u の初期値は $t = 0$ で与えらており，境界 $\partial\Omega$ で境界条件をみたす．$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ であり，$u \cdot \nabla$ は $\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ である．また，υ は正の定数である．詳しくは，[Chorin-Marsden, 1993] に書かれている．

多くの数学者がこの問題の解明に取り組んできた．次元が 2 の場合と，次元が 3 で t が小区間 $[0, T]$ の場合には肯定的に解かれている．[Temam, 1979] にその基礎知識が書かれている．

この問題が解ければ，乱流を理解するというたいへん大きな問題に対する重要なステップになる．例えば，[Ruelle and Takens, 1971] の発想を実現する助けになるだろう．そこでは，カオス的アトラクターの概念を乱流のモデルに取り込んでいる [Chorin, Marsden and Smale, 1977].

[Smale, 1991] で，私はトーラス上の強制項 (forcing term) をもつ 2 次元ナヴィエ・ストークス方程式の解は，時刻が無限大にいくにつれて平衡点に収束しなければならないかどうかを問うた．バビック (Babik) とビシック (Vishik)(1983) は否定的な証拠をいくつか示した．後に，リュー (Liu)(1992) がより複雑なアトラクターに収束する例を示した．

問題 16. ヤコビ予想

$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は各点の微分が正則である多項式写像であるとする．このとき，f は単射か？

ここで，$f = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ の各 f_i は n 変数多項式である．f の点 z での微分 $Df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は偏微分のつくる行列であり，その正則性は Det $Df(z) \neq 0$ と書ける．

もし，f が単射であるなら，それは全射であり，その逆像は多項式写像である．この初等的証明は［Rudin, 1995］にある．

この問題は 1930 年代にさかのぼることができる．その重要性，背景，関連する結果に関して，［Bass, Connell and Wright, 1982］と［van den Essen, 1997］の優れたサーベイがある．

問題 17. 多項式の解法

> **n 個の n 変数複素多項式の解は，一様アルゴリズムで，平均的に多項式時間で近似的に見つけることができるか？**

シャブとの私の一連の論文［Shub and Smale, 1994］の最後の定理で，“一様”という条件を除けば，上の主張が成り立つことを示した．

定義を復習しておこう．まず，$f = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$，$z = (z_1, \ldots, z_n)$ を考える．f_i は次数 d_i の n 変数多項式である．問題を分かりやすくするため，新しい変数 z_0 を加えて f_i を斉次多項式とし，それに対応する射影空間で問題を考える．後で，そこで得られたアルゴリズムや結果をもとのアフィン的な問題に置き直す．

“近似的に”という定義は本質的にはニュートン法によってなされる．また，“近似的に”という言葉は，アーベル，ガロアらの結果からもなくてはならない．厳密を期すならば，計算時間は (問題 3 で述べられているような) 実数上の機械で計算したときの四則演算と比較 ($\leq$) の操作の総数で定義する．

各 $d = (d_1, \ldots, d_n)$ に対して，次数 d の多項式写像 f 全体のなす空間上に確率測度が与えられる．これによって，アルゴリズムの時間はそのような空間上で平均される．このとき，平均計算時間が f の係数の数 (これが入力サイズである) の多項式で抑えられるようなアルゴリズムが存在するだろうか？

［Shub and Smale, 1994］においてこのようなアルゴリズムがあることは証明された．しかし，そのアルゴリズムは d ごとに異なり，また望まれる成功確率によってさえ異なる．一様アルゴリズムとは d に依存しないアルゴリズムである (d は入力の一部となる)．

たしかに多項式や多項式系の解を見つけるという問題は最も古くからある数学の中心的な問題の 1 つである．問題 17 は，示されたいくつかの条件のも

とではそれがコンピュータによってシステマティックに解けるのだろうかと問うている．もし解を多項式時間で与える方法がなければ，どんなコンピュータでも実現されないだろう．

最近，多項式の解を求める問題が普遍的な役割をになうようになってきている．例えば，ヒルベルトの零点定理は (決定問題として) 任意の体上で **NP** 完全である (問題 3 をみよ).

同様な問題は実数上でも考えることができるが，より難しいだろう．

問題 18. 知性の限界について

人工知能または人間の知性の限界とは何か？

ペンローズ (Penrose)(1991) は人工知能の限界を示そうとしている．彼の議論はマンデルブロー集合が決定可能かどうかというおもしろい問題 (詳しくは［Blum and Smale, 1993］) を提起し，ゲーデルの不完全性定理の意味を考察する．

しかし，人工知能と人間の知性のどこが同じで，またどれくらい違うかを研究するためには，幅広い研究が要求される．脳とコンピュータのより深いモデルの研究もその 1 つである．私は，実数，近似，確率，幾何などの数学とともに，学習，問題解決，ゲーム理論が重要な役割を果たす方向に注目していきたい．

またの機会にこれらの考え方を発展させたいと思う．

参考文献

Abraham, R. and Marsden, J. (1978). *Foundations of Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.

Babin, A. V. and Vishik, M. I. (1983). Attractors of partial differential evolution equations and their dimension. *Russian Math. Surveys* **38**, 151–213.

Barvinok, A. and Vershik, A. (1993). Polynomial-time, computable approximation of families of semi-algebraic sets and combinatorial complexity. *Amer. Math. Soc. Trans*, **155**, 1–17.

Bass, H., Connell, E., and Wright, D. (1982). The Jacobian conjecture: reduction on degree and formal expansion of the inverse. *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) **7**, 287–330.

BCSS: Blum, L., Cucker, F., Shub, M., and Smale, S. (1997). *Complexity and Real Computation*, Springer-Verlag.

Blum, L., Shub, M., and Smale, S. (1989). On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completness, recursive functions and universal machines. *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* (2) **21**, 1–46.

Blum, L. and Smale, S. (1993). The Gödel incompleteness theorem and decidability over a ring. Pages 321–339 in M. Hirsch, J. Marsden, and M. Shub (editors), *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, Springer-Verlag.

Browder, F. (ed.), (1976). *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, American Mathematical Society, Providence, RI.

Brownawell, W. (1987). Bounds for the degrees in the Nullstellensatz. *Annals of Math.* **126**, 577–591.

Chern, S. and Smale, S. (eds.) (1970). *Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics*, vol. XIV, American Mathematical Society, Providence, RI.

Chorin, A., and Marsden, J. (1993). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3rd edition, Springer-Verlag, New York.

Chorin, A., Marsden, J., and Smale, S. (1977). Turbulence Seminar, Berkeley 1976–77, *Lecture Notes in Math.* **615**, Springer-Verlag, New York.

Cucker, F., Koiran, P., and Smale, S. (1997). A polynomial time algorithm for Diophantine equations in one variable. To appear.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value*, John Wiley & Sons, New York (G. ドブリュー著『価値の理論』丸山徹訳，東洋経済新報社).

Dulac, H. (1923). Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math. France* **51**, 45–188.

Écalle, J. (1992). *Introduction aux Fonctions Analysables et Preuve Constructive de la Conjecture de Dulac*. Hermann, Paris.

van den Essen, A. (1997). Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, in *Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants, septième contact Franco-Belge, Reims, Juin 1995*, eds. J. Alev and G. Cauchon, Société mathématique de France, Paris.

Freedman, M. (1982). The topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.* **17**, 357–454.

Garey, M., and Johnson, D. (1979). *Computers and Intractability*, Freeman, San Francisco.

Grötschel, M., Lovász, L., and Schrijver, A. (1993). *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, New York.

Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1990). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, third printing, Springer-Verlag, New York.

Guckenheimer, J. and Williams, R. F. (1979). Structural stability of Lorenz attractors. *Publ. Math. IHES* **50**, 59–72.

Hayashi, S. (1997). Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability conjecture and Ω-stability conjecture for flows. *Annals of Math.* **145**, 81–137.

Hirsch, M. and Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York.

Ilyashenko, J. (1985). Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations, *Russian Math. Surveys* VHO, 1–49.

Ilyashenko, Yu. (1991). *Finiteness Theorems for Limit Cycles*, American Mathematical Society, Providence, RI.

Ilyashenko, Yu. and Yakovenko, S. (1995). Concerning the Hilbert 16th problem. *AMS Translations*, series 2, vol. **165**, AMS, Providence, RI.

Jakobson, M. (1971). On smooth mappings of the circle onto itself. *Math. USSR Sb.* **14**, 161–185.

Kuijlaars, A. B. J. and Saff, E. B. (1997). Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

Kuz′mina, R., (1977). An upper bound for the number of central configurations in the plane n-body problem. *Sov. Math. Dok.* **18**, 818–821.

Lang, S. (1991). *Number Theory III*, vol. **60** of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York.

Linz, A., de Melo, W., and Pugh, C. (1977), in Geometry and Topology, *Lecture Notes in Math.* **597**, Springer-Verlag, New York.

Liu, V. (1992). An example of instability for the Navier-Stokes equations on the 2-dimensional torus. *Commun. PDE* **17**, 1995–2012.

Lloyd, N. G. and Lynch, S. (1988). Small amplitude limit cycles of certain Lienard systems. *Proceedings Roy. Soc. London* **418**, 199–208.

Lorenz, E. (1963). Deterministic non-periodic flow. *J. Atmosph. Sci.* **20**, 130–141.

Manders, K. L. and Adleman, L. (1978). NP-complete decision problems for binary quadratics. *J. Comput. System Sci.* **16**, 168–184.

McMullen, C. (1994). Frontiers in complex dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) **31**, 155–172.

de Melo, W. and van Strien, S. (1993). *One-Dimensional Dynamics.* Springer-Verlag, New York.

Palis, J. and Yoccoz, J. C. (1989). (1) Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. *Ann, Scient. Ecole Normale Sup.* **22**, 81–98; (2) Centralizer of Anosov diffeomorphisms. *Ann. Scient. Ecole Normale Sup.* **22**, 99–108.

Palmore, J. (1976). Measure of degenerative relative equilibria. I. *Annals of Math.* **104**, 421–429.

Petrovskiĭ, I. G. and Landis, E. M. (1957). On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials. *Mat. Sb. N.S.* **43** (85), 149–168 (in Russian), and (1960) *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) **14**, 181–200.

Petrovskiĭ, I. G. and Landis, E. M. (1959). Corrections to the articles "On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials." *Mat. Sb. N.S.* **48** (90), 255–263 (in Russian)

Penrose, R. (1991). *The Emperor's New Mind*, Penguin Books. (R. ペンローズ著『皇帝の新しい心』林一訳，みすず書房)

Poincaré, H. (1953). *Oeuvres*, VI. Gauthier-Villars, Paris. Deuxième Complément à L'Analysis Situs.

Peixoto, M. (1962). Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* **1**, 101–120.

Pugh, C. (1967). An improved closing lemma and a general density theorem. *Amer. J. Math.* **89**, 1010-1022.

Pugh, C. and Robinson, C. (1983). The C^1 closing lemma including Hamiltonians. *Ergod. Theory Dynam. Systems* **3**, 261–313.

Rakhmanov, E. A., Saff, E. B., and Zhou, Y. M. (1994). Minimal discrete energy on the sphere, *Math, Res. Lett.* **1**, 647–662.

Robinson, C. (1989). Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type. *Non-linearity* **2**, 495–518.

Rudin, W. (1995). Injective polynomial maps are automorphisms. *Amer. Math. Monthly* **102**, 540–543.

Ruelle, D. and Takens, F. (1971). On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20**, 167–192.

Samuelson, P. (1971). *Foundations of Economic Analysis*, Atheneum, New York (P. A. サミュエルソン著『経済分析の基礎』増補版，佐藤隆三訳，勁草書房).

Saff, E. and Kuijlaars, A. (1997). Distributing many points on a sphere. *Mathematical Intelligencer* **10**, 5–11.

Schrijver, A. (1986). *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons.

Shi, S. (1982). On limit cycles of plane quadratic systems. *Sci. Sin.* **25**, 41–50.

Shub, M. (1970). Appendix to Smale's paper: Diagrams and relative equilibria in manifolds, Amsterdam, 1970. *Lecture Notes in Math.* **197**, Springer-Verlag, New York.

Shub, M. and Smale, S. (1993). Complexity of Bezout's theorem, III: condition number and packing. *J. of Complexity* **9**, 4–14.

Shub, M. and Smale, S. (1994). Complexity of Bezout's theorem, V: polynomial time, *Theoret. Comp. Sci.* **133**, 141–164.

Shub, M. and Smale, S. (1995). On the intractibility of Hilbert's Nullstellensatz and an algebraic version of "P = NP", *Duke Math, J.* **81**, 47–54.

Smale, S. (1963). Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms, pages 490–496 in: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Inst. Mittag-Leffler, Sweden, 1962, (V. Stenström, ed.)

Smale, S. (1963). A survey of some recent developments in differential topology. *Bull. Amer. Math. Soc.* **69**, 131–146.

Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747–817.

Smale, S. (1970). Topology and mechanics, I and II. *Invent. Math.* **10**, 305–331 and *Invent. Math.* **11**, 45–64.

Smale, S. (1976). Dynamics in general equilibrium theory. *Amer. Economic Review* **66**, 288–294.

Smale, S. (1980). *Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York.

Smale, S. (1981). Global analysis and economics, pages 331–370 in *Handbook of*

Mathematical Economics **1**, editors K. J. Arrow and M. D. Intrilligator. North-Holland, Amsterdam.

Smale, S. (1990). The story of the higher-dimensional Poincaré conjecture. *Mathematical Intelligencer* **12**, no. 2, 40–51. Also in M. Hirsch, J. Marsden, and M. Shub, editors, *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, 281–301 (1992).

Smale, S. (1991). Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed. *Physica D* **51**, 267–273.

Taubes, G. (July 1987). What happens when Hubris meets Nemesis? *Discover.*

Temam, R. (1979). *Navier-Stokes Equations*, revised edition, North-Holland, Amsterdam.

Traub, J. and Woźniakowski, H. (1982). Complexity of linear programming. *Oper. Res. Letts.* **1**, 59–62.

Tsuji, M. (1959). *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen Co., Ltd., Tokyo.

Wen, L. and Xia, Z. (1997). A simpler proof of the C^1 connecting lemma. To appear.

Williams, R. (1979). The structure of Lorenz attractors. *Publ. IHES* **50**, 101–152.

Wintner, A. (1941). *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

編者による文献案内

ここでは，本書の収録記事が書かれた後に出版された関連文献や日本語の参考文献を紹介する．

■第 I 部

第 I 部の記事の後，マックレーンは次の本を書いている．

[1] S. マックレーン著 (彌永昌吉監修)『数学：その形式と機能』森北出版 1992 (原著 Springer 1986).

[2] S. Mac Lane and I. Moerdijk "Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory" Springer 1992.

マックレーンが攻撃している巨大基数の研究については，次の本を見るのがよい．

[3] A. カナモリ著 (渕野昌訳)『巨大基数の集合論』シュプリンガー東京 1998 (原著 Springer 1997).

もう 1 つの攻撃目標である再帰理論の次数については，

[4] R. Soare, Recursively Enumerable Sets and Degrees, Springer 1987.

がよくできた教科書ではあるが，やや専門的過ぎるかもしれない．再帰理論全般の入門書としては，次の本がよい．

[5] P. Odifreddi, Classical Recursion Theory, North-Holland 1989.

[6] 篠田寿一著『帰納的関数と述語』河合文化教育研究所 1997.

現代的なロジックの全般を外観するには，次の本がとてもよくできている．

[7] J. Barwise, Handbook of Mathematical Logic, North-Holland 1977.

さて,「数学の基礎」の研究としては,

[8] D. Hilbert and P. Bernays, Grundlagen der Mathematik I, II, Springer 1934, 1939 (2nd edit. 1968, 1970)

が古典中の古典である. この本には, 吉田夏彦・渕野昌による抄訳 (『数学の基礎』シュプリンガー東京 1993) があるが, 残念ながら実際の数学に適した公理系 (2 階算術) の解説は訳されていない. この本の続編をうたっているのが, 最近出た次の本である.

[9] S. Simpson "Subsystems of Second-Order Arithmetic" Springer 1998.

また, これらに近い精神で書かれた日本語の基礎論入門書に, 以下のものがある.

[10] 田中一之編著『数学基礎論講義』日本評論社 1997.

[11] 田中一之著『逆数学と 2 階算術』河合文化教育研究所 1997.

■第 II 部

構成的数学の本としては,

[12] D. Bridges and F. Richman, Varieties of Constructive Mathematics, Cambridge Univ. Press 1987.

[13] A. Troelstra and D. van Dalen, Constructivism in Mathematics, An Introduction, Vol.1, 2, North-Holland 1988.

が代表的であろう. 超準解析の本はたくさんあるが, 日本語の本として次の 2 冊を挙げておく.

[14] M. デービス著 (難波完爾訳)『超準解析』培風館 1982(原著 John Wiley & Sons 1977).

[15] 中村徹著『超準解析と物理学』日本評論社 1998.

■第 III 部

バナッハ・タルスキの定理のさらに詳しい解説は以下のものを参照.

[16] T. Jech, The Axiom of Choice, North-Holland 1973.

[17] S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge Univ. Press 1985.

[18] 砂田利一著『バナッハ・タルスキーのパラドックス』岩波書店 1997.

反基礎の公理についての解説を含んだ集合論の教科書として, 次の本が薦められる.

[19] K. Devlin, The Joy of Sets, Fundamentals of Contemporary Set Theory, 2nd Edition, Springer 1993.

超集合の話とは直接関連しないが，バーワイズの最近の仕事に次のものがある．

[20] J. バーワイズ・J. ペリー著 (土屋俊他訳)『状況と態度』産業図書 1993 (原著 MIT Press 1987).

■第 IV 部

第 IV 部の 2 つの記事のあとにはそれぞれ豊富な文献リストがあるので，ここでは第 IV 部に限定せず本書全体に関わる文献で,「数学」を考えるのに役立ちそうなものを思いつくまま拾っておく．

[21] P. J. デービス・R. ヘルシュ著　柴垣和三雄他訳『数学的経験』森北出版 1986 (原著 Birkhaüser, 1982).
[22] J. デュドンネ著　高橋礼司訳『人間精神の名誉のために—数学賛歌—』岩波書店 1989 (原著 Hachette, 1987).
[23] イアン=スチュアート著　雨宮一郎訳『数学の冒険』紀伊国屋書店 1990 (原著 Oxford Univ. Press, 1987).
[24] R. Penrose, Shadows of the Mind, Oxford Univ. Press 1994.
[25] 岩波講座・現代思想，第 10 巻『科学論』1994, 第 11 巻『精密科学の思想』1995.
[26] 飯田隆編『リーディングス・数学の哲学 ゲーデル以降』勁草書房 1995.
[27] 杉浦光夫編『ヒルベルト 23 の問題』日本評論社 1997.
[28] 竹内外史著『新版・ゲーデル』日本評論社 1998.

● 後書きに代えて

インテリジェンサー誌の創刊の年 (1978 年) は，不完全性定理で有名なゲーデルが亡くなった年でもある．またちょうどその頃，アメリカではホフスタッダーの大部の著『ゲーデル・エッシャー・バッハ』がベストセラーになり，学界においてはパリスとハーリントンがペアノ算術における新種の (自己言及文でない) 独立命題を発見し数学基礎論の新しい流れを作った．

いわゆるゲーデル・ブームの中で，初期のインテリジェンサー誌にはゲーデル関係の記事がよく載っていたが，私が本誌の存在を知ったのは創刊から4,5年後，カリフォルニア大学バークレイ校の大学院生として博士論文の研究テーマを模索し始めた頃だった．私の指導教官はハーリントン教授であったが，私が先生の仕事(パリス・ハーリントンの定理)を理解できたのも，インテリジェンサーに載ったスモンリンスキーの2つの解説記事(本書には未収録)に負うところが大きかった．また，本書の第I部として収録したマックレーンの論争は，その頃から私が帰国して東工大で助手をしていた頃まで続いたが，これが私の研究人生に与えた影響は絶大であった．

本文中(53頁)に「ハーヴィー=フリードマンとその仲間たちの仕事」として言及されている基礎論の新しい研究プログラムは，その後S.シンプソンのリードで活発に進められ，現在は「逆数学」という名で広く知られている．普通の数学では公理から定理を導くことがすべてであるのに対し，逆数学では一般の定理から出発しそれに適した公理系を探すことを目的としている．私は，1989年から90年にシンプソンのもとでこの分野を学び，以来それが私の専門になってしまった(文献案内の文献［9］，［10］，［11］を参照)．

基礎論の今後の研究テーマについては，本文に多くの例が語られているので，別の人が読めばまた別のテーマに魅せられるのかもしれない．大切なことは，研究の方向や意味を自分の頭で考える習慣を身につけることであろう．私を含めた凡才の研究者集団では，難しい離れ業のような研究だけを偉いものと思いがちであるが，本書を読めばそういう呪縛からは解放されるだろう．様々な主義主張が交差する中で，読者諸賢がどの意見に賛同されまた反対されるかは推し量れないが，本書のどこか一個所にでも目を止められ，これからの数学と数学基礎論のあるべき姿を考えるための，あるいはご自身と数学の今後の関わりを考えるためのヒントとしていただければ，編者として望外の幸せである．

さて，数学の調子はどうだろうか？

人名索引

斜体で表記されているページは参考文献が掲載されているページ数を表す.

事項索引

■た行

■な行

■は行

編・監訳者
田中　一之（たなか　かずゆき）
1978 年，東京工業大学理学部卒業．
1986 年，カリフォルニア大学バークレイ校 Ph.D.
現在，東北大学大学院理学研究科教授．
研究分野：数学基礎論，とくに 2 階算術のモデルと逆数学の研究．
著訳書：『計算理論と論理プログラミング』（丸善，共訳），『数学基礎論講義』（日本評論社，編著），『逆数学と 2 階算術』（河合文化教育研究所），『基礎課程 線形代数学』（培風館，共著）ほか．

訳者
角田　法也（かどた　のりや）
1982 年，広島大学理学部卒業．
1992 年，広島大学博士（学術）．
現在，熊本大学講師．
研究分野：計算可能関数の階層と 1 階算術の部分体系．
著書：『数学基礎論講義』（日本評論社，共著）．

黒田　覚（くろだ　さとる）
1992 年，早稲田大学理工学部中退．
1994 年，名古屋大学理学修士．
現在，豊田工業高専講師．
研究分野：限定算術とその計算量理論への応用．

白旗　優（しらはた　まさる）
1984 年，京都大学文学部卒業．
1994 年，スタンフォード大学 Ph.D.
現在，慶応大学商学部講師．
研究分野：数理論理学および数学の哲学．

永山　操（ながやま　みさお）
1986 年，東京女子大文理学部卒業．
1991 年，スタンフォード大学 Ph.D.
現在，東京女子大文理学部講師．
研究分野：数理論理学，とくにコンピュータサイエンスとの関連分野．
訳書：『Microsoft Visual Basic 4.0 テクニックライブラリ』，『Microsoft Visual Basic 5.0 テクニックライブラリ』（アスキー出版局）．

山崎　武（やまざき　たけし）
1995 年，東北大学理学部卒業．
1997 年，東北大学理学修士．
現在，東北大学博士後期課程．
研究分野：数学基礎論，とくに逆数学と限定算術．

数学の基礎をめぐる論争
21 世紀の数学と数学基礎論のあるべき姿を考える　定価（本体 2,700 円＋税）

発　　行　1999 年 2 月 20 日
編・監訳者　田中　一之
発 行 者　平野　皓正
発 行 所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113-0033　東京都文京区本郷 3 丁目 3 番 13 号
TEL (03) 3812-0757（営業直通）
印 刷 所　平河工業社

ISBN 4-431-70797-2 C3041